第1問　（２０２，２０３共通問題）

(1)　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$　$\Leftrightarrow$　$2r=\sqrt{6}(1-r\cos\theta)$

両辺を平方して、$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$　に置き換えて

$$4(x^2+y^2)=6(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow\ (x-3)^2-2y^2=6 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

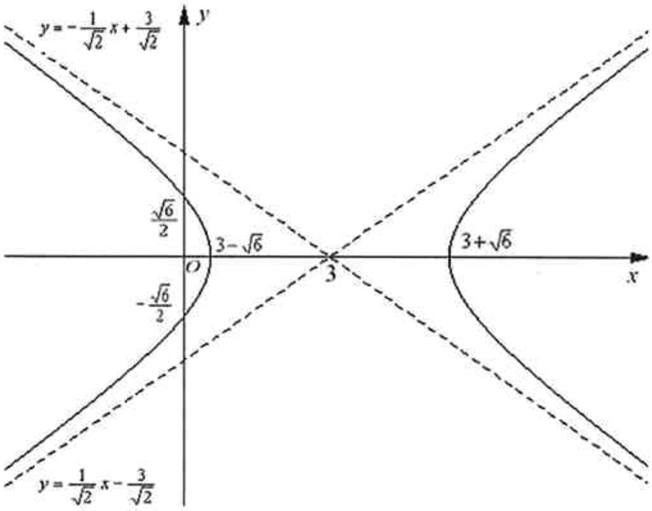
整理して、求める曲線は

双曲線　$\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$

漸近線は　$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x-3)$

$=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x\mp\dfrac{3}{\sqrt{2}}$　（複号同順）

グラフは右図のようになる。



(2)　$PH^2=|x-a|^2=(x-a)^2$

$OP^2=x^2+y^2$

①より、　$y^2=\dfrac{1}{2}(x^2-6x+3)$　であるから、

$$OP^2=x^2+\frac{1}{2}(x^2-6x+3)=\frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$\therefore\quad k^2=\frac{OP^2}{PH^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x-a)^2}$$

したがって、k が一定となるには　$\boldsymbol{a=1}$　で、このとき　$\boldsymbol{k=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$　$(\because\ k>0)$

第2問　（２０２，２０３共通問題）

$$\left|z-\sqrt{2}\right|=\left|z+i\right| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

(1)　両辺を平方して整理すると

$$(\sqrt{2}-i)z+(\sqrt{2}+i)\bar{z}=1$$

$z=x+yi$ とすると $\bar{z}=x-yi$ で

$$(\sqrt{2}-i)(x+yi)+(\sqrt{2}+i)(x-yi)=1$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{2}x+2y=1$$

$y=0,\quad x=0$ として、α，β はそれぞれ

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \beta=\frac{i}{2}}$$

(2)　$w_1=\dfrac{1}{z+i}$ を変形して　$z=\dfrac{1}{w_1}-i\quad (w_1\neq 0)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

これを①に代入すると、

$$\left|\frac{1}{w_1}-i-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{1}{w_1}\right| \iff \frac{\left|1-iw_1-\sqrt{2}w_1\right|}{\left|w_1\right|}=\frac{1}{\left|w_1\right|}$$

$$\iff \left|w_1-\frac{1}{\sqrt{2}+i}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって、**w_1 は中心 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}=\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-i)$，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の円（ただし、原点を除く）**を描く。

(3)　$w_2=\dfrac{z+iz+1}{z+i}$ に②を代入すると、

$$w_2=\frac{\left(\frac{1}{w_1}-i\right)+i\left(\frac{1}{w_1}-i\right)+1}{\left(\frac{1}{w_1}-i\right)+i}=(2-i)w_1+(1+i)$$

$2-i=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$（ただし θ は $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ をみたす角）とすると

w_2 は w_1 を 原点のまわりに θ だけ回転移動し、原点からの距離を $\sqrt{5}$ 倍した点を、さらに実軸方向に 1，虚軸方向に i だけ平行移動した点であるから、

w_2 を表す複素数は、

中心 $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-i)\times(2-i)\ +(1+i)=\mathbf{\frac{1}{3}\left\{2(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i\right\}}$,

半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{5}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

の円を描く。ただし、 $w_1\neq 0$ より、 $\mathbf{w_2\neq 1+i}$

第3問 (1) $S=\int_0^b x\,dy$

$$=a\int_0^b\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2dy$$

$$=\frac{1}{6}ab$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(a-2a^{\frac{3}{2}}+a^2\right)}$$

(2) $\dfrac{dS}{da}=\dfrac{1}{6}\left(1-3a^{\frac{1}{2}}+2a\right)=\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{a})(1-2\sqrt{a})=0$ とおくと

a	0		$\frac{1}{4}$		1
$\frac{dS}{da}$		$+$	0	$-$	
S		↗	極大	↘	

$$\therefore\quad S_{\max}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{96}}$$

第4問 (1) $B^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{6}\\ \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

$$C^2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-6}\\ -\mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$CB=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

(2) $A=sB+tC$

$$\begin{pmatrix}a & 9\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s-t & 3s+3t\\ \frac{s}{3}+\frac{t}{3} & s-t\end{pmatrix}$$

$s-t=a,\quad 3s+3t=9,\quad s+t=3$

$2s=a+3 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{s=\frac{a+3}{2}}$

$2t=3-a \qquad \therefore\quad \boldsymbol{t=\frac{3-a}{2}}$

(3) $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix}2 & 6\\ \frac{2}{3} & 2\end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix}4 & 12\\ \frac{4}{3} & 4\end{pmatrix}$

$$B^4=\begin{pmatrix}8 & 24\\ \frac{8}{3} & 8\end{pmatrix},\cdots\cdots,\ B^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 3\cdot 2^{n-1}\\ \frac{2^{n-1}}{3} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

と推定できる。

$n=1$ のときは一致する。

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$B^{k+1}=\begin{pmatrix}2^{k-1} & 3\cdot 2^{k-1}\\ \frac{2^{k-1}}{3} & 2^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^{k-1}+2^{k-1} & 3\cdot 2^{k-1}+3\cdot 2^{k-1} \\ \dfrac{2^{k-1}+2^{k-1}}{3} & 2^{k-1}+2^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2^{(k+1)-1} & 3\cdot 2^{(k+1)-1} \\ \dfrac{2^{(k+1)-1}}{3} & 2^{(k+1)-1} \end{pmatrix}$$

よって、$n=k+1$ のときも成り立つ。

同様に、数学的帰納法によって

$$C^n=\begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 3\cdot(-2)^{n-1} \\ \dfrac{(-2)^{n-1}}{3} & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

も示される。

(4) $a=2$ のとき $s=\dfrac{5}{2}$, $t=\dfrac{1}{2}$ で、このとき

$A^n=(sB+tC)^n$

$$=\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\cdot(sB)^{n-r}\cdot(tC)^r$$

$BC=CB=O$ より $A^n=s^nB^n+t^nC^n$

$$A^n=s^n\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 3\cdot 2^{n-1} \\ \dfrac{2^{n-1}}{3} & 2^{n-1} \end{pmatrix}+t^n\begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 3\cdot(-2)^{n-1} \\ \dfrac{(-2)^{n-1}}{3} & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{5^n+(-1)^n}{2} & \dfrac{3\cdot 5^n-3\cdot(-1)^n}{2} \\ \dfrac{5^n-(-1)^n}{6} & \dfrac{5^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$