第1問 （２０２，２０３共通問題）

(1) $r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta} \iff 2r=\sqrt{6}(1-r\cos\theta)$

両辺を平方して、$r^2=x^2+y^2$, $r\cos\theta=x$ に置き換えて

$$4(x^2+y^2)=6(1-x)^2$$

$$\iff (x-3)^2-2y^2=6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

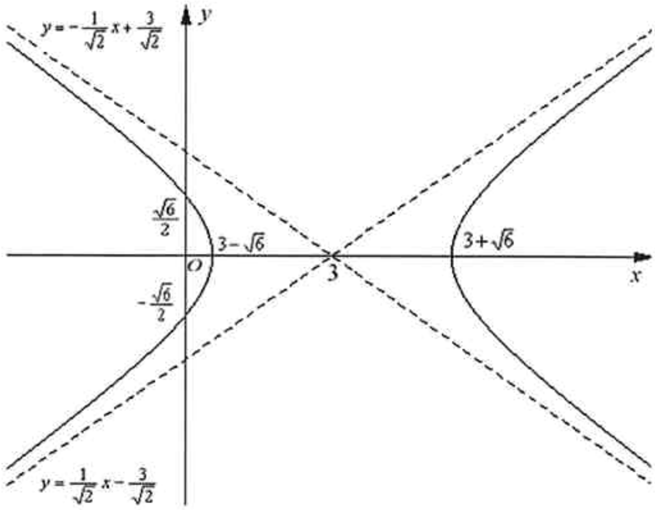
整理して、求める曲線は

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1}$

漸近線は $\boldsymbol{y}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x-3)$

$=\pm\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}x\mp\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$ （複号同順）

グラフは右図のようになる。



(2) $PH^2=|x-a|^2=(x-a)^2$

$OP^2=x^2+y^2$

①より、 $y^2=\dfrac{1}{2}(x^2-6x+3)$ であるから、

$$OP^2=x^2+\frac{1}{2}(x^2-6x+3)=\frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$\therefore \quad k^2=\frac{OP^2}{PH^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x-a)^2}$$

したがって、k が一定となるには $\boldsymbol{a=1}$ で、このとき $\boldsymbol{k}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$ $(\because\ k>0)$

第2問 （２０２，２０３共通問題）

$$\left|z-\sqrt{2}\right|=\left|z+i\right| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

(1) 両辺を平方して整理すると

$$(\sqrt{2}-i)z+(\sqrt{2}+i)\bar{z}=1$$

$z=x+yi$ とすると $\bar{z}=x-yi$ で

$$(\sqrt{2}-i)(x+yi)+(\sqrt{2}+i)(x-yi)=1$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{2}x+2y=1$$

$y=0,\quad x=0$ として、α，β はそれぞれ

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \beta=\frac{i}{2}}$$

(2) $w_1=\dfrac{1}{z+i}$ を変形して $z=\dfrac{1}{w_1}-i \quad (w_1\neq 0) \cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

これを①に代入すると、

$$\left|\frac{1}{w_1}-i-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{1}{w_1}\right| \iff \frac{\left|1-iw_1-\sqrt{2}w_1\right|}{\left|w_1\right|}=\frac{1}{\left|w_1\right|}$$

$$\iff \left|w_1-\frac{1}{\sqrt{2}+i}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって、**w_1 は中心 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}=\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-i)$，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の円**（**ただし、原点を除く**）を描く。

(3) $w_2=\dfrac{z+iz+1}{z+i}$ に②を代入すると、

$$w_2=\frac{\left(\frac{1}{w_1}-i\right)+i\left(\frac{1}{w_1}-i\right)+1}{\left(\frac{1}{w_1}-i\right)+i}=(2-i)w_1+(1+i)$$

$2-i=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$（ただし θ は $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ をみたす角）とすると

w_2 は w_1 を 原点のまわりに θ だけ回転移動し、原点からの距離を $\sqrt{5}$ 倍した点を、さらに実軸方向に 1，虚軸方向に i だけ平行移動した点であるから、

w_2 を表す複素数は、

中心 $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-i)\times(2-i)+(1+i)=\mathbf{\frac{1}{3}\left\{2(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i\right\}}$，

半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{5}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

の円を描く。ただし、 $w_1\neq 0$ より、 $\mathbf{w_2\neq 1+i}$

第3問

$$y = x^3 - 12x + 6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$y = kx - k - 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

(1) ①，②より

$$x^3 - 12x + 6 = kx - k - 5$$

$$\Leftrightarrow \ x^3 - (k+12)x + k + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-1)(x^2 + x - k - 11) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

「C と l が異なる３つの共有点をもつ」 ⇔ 「③が異なる３つの実数解をもつ」

すなわち、２次方程式 $x^2 + x - k - 11 = 0$ ………… ④

が $x = 1$ 以外の異なる２つの実数解をもてばよい。

（④の判別式）>0 より、 $k > -\dfrac{45}{4}$

また、$x \neq 1$ より、 $k \neq -9$

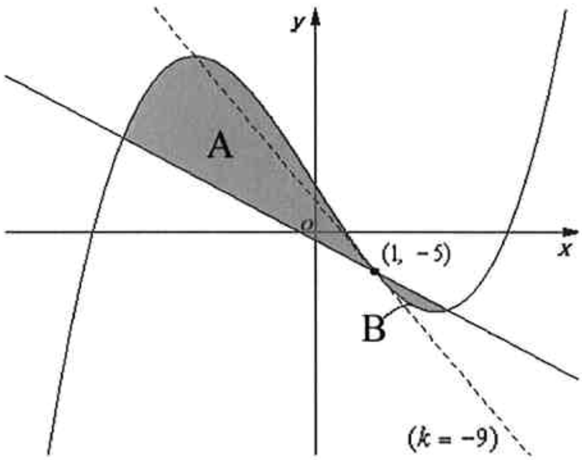
以上より、求める k の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{45}{4} < k < -9, \quad -9 < k}$

(2) ②より $y = k(x-1) - 5$ であるから、

直線 l は定点 $(1, \ -5)$ を通るが、これは

曲線 C 上の点である。また(1)の結果より、

$k = -9$ のとき l は C に接することが分かる。



（$k = -9$ のとき、方程式④の左辺は
$(x-1)(x+2)$ となるから、方程式③
は $(x-1)^2(x+2) = 0$ となり、$x = 1$
が２重解、すなわちこの点で接する
ことが分かる。）

したがって、グラフより考えて、求める k の範囲は $\boldsymbol{k > -9}$

【別解】 ③より、条件を満たすためには、方程式④が 1 より大きい解をもてばよい。

そこで、$f(x) = x^2 + x - k - 11$ として条件を考えるが

$f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{45}{4} - k$ より、軸は $x = -\dfrac{1}{2}$ なので、1 より大きい解を２つもつ

ことはない。

これより求める条件は　$f(1)<0$　　$\therefore$　$k>-9$

(3)　$x=1$ で C と l は交わるから、それを考慮すると A と B の差が 54 というのは

④の解を α，β（$\alpha<\beta$）としたとき、

$$\left|\int_\alpha^\beta\left\{x^3-(k+12)x+k+11\right\}dx\right|=54$$

を満たすときである。

ここで、

$$x^3-(k+12)x+k+11=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=(x-\alpha)^3+(2\alpha-\beta-1)(x-\alpha)^2+(\alpha-1)(\alpha-\beta)(x-\alpha)$$

であるから

$$\int_\alpha^\beta\left\{x^3-(k+12)x+k+11\right\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^3+(2\alpha-\beta-1)(x-\alpha)^2+(\alpha-1)(\alpha-\beta)(x-\alpha)dx$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+\frac{(2\alpha-\beta-1)(\beta-\alpha)^3}{3}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2}{2}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}(2-\alpha-\beta)$$

ところで、α，β に対して解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-1,\quad \alpha\beta=-k-11$$

これを用いると

$$\left|\frac{(\beta-\alpha)^3}{4}\right|=\frac{(\beta-\alpha)^3}{4}=54 \qquad \therefore\quad \beta-\alpha=6$$

以上より

$$\alpha=-\frac{7}{2},\quad \beta=\frac{5}{2}$$

となるので、求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k=-\frac{9}{4}}$$

第4問 (1) $y=a^x$, $y'=a^x\log a$

$x=1$ のとき、(傾き) $=a\log a$ $\therefore$ $y=a\log a\cdot(x-1)+a$

よって、求める方程式は

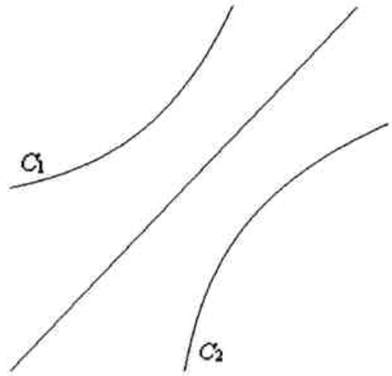
$$\boldsymbol{y=(a\log a)x-a\log a+a}$$

(2) $C_1: y=a^x$ と $C_2: y=\log_a x$ は逆関数であるから、

直線 $y=x$ に関して対称。また、$y=a^x$ は $y=x$

に向かって下に凸より、$y=a^x$ の接線が $y=x$ と

平行となるとき D は最小になる。



よって、$a^x\log a=1$ より $x=\log_a\left(\frac{1}{\log a}\right)$

$P_1\left(\log a\left(\frac{1}{\log a}\right),\ \frac{1}{\log a}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{\log a},\ \log a\left(\frac{1}{\log a}\right)\right)$

のとき

$$\boldsymbol{D}=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\log a}-\log a\left(\frac{1}{\log a}\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{\log a}\{1+\log(\log a)\}}$$

(3) $$\frac{dD}{da}=\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\log a-\frac{1}{a}\{1+\log(\log a)\}}{(\log a)^2}$$

$$=-\sqrt{2}\cdot\frac{\log(\log a)}{a(\log a)^2}$$

$a\geqq e$ のとき $\frac{dD}{da}<0$ となるので D は単調減少。

ゆえに、 $\boldsymbol{a=e}$ のとき最大となる。

(4) $$V=\pi\int_0^1(e^x-ex)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-2e^x\cdot ex+e^2x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}e^2x^3\right]_0^1-2\pi e\int_0^1 e^x\cdot xdx$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{5}{6}e^2-2e-\frac{1}{2}\right)}\pi$$