第1問 (1)　$\theta+45^\circ=\alpha$　とおくと

（左辺）$=\sin(\alpha+30^\circ)+\sin(\alpha-30^\circ)+\cos\alpha$

$=(\sin\alpha\cos30^\circ+\cos\alpha\sin30^\circ)+(\sin\alpha\cos30^\circ-\cos\alpha\sin30^\circ)+\cos\alpha$

$=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$

$=2\sin(\alpha+30^\circ)$

$=2\sin(\theta+75^\circ)\geqq 1$

$\sin(\theta+75^\circ)\geqq\dfrac{1}{2}$

$75^\circ\leqq\theta+75^\circ<435^\circ$　であるから

$75^\circ\leqq\theta+75^\circ\leqq150^\circ$,　　$390^\circ\leqq\theta+75^\circ<435^\circ$

$\therefore$　$\mathbf{0^\circ\leqq\theta\leqq75^\circ}$,　　$\mathbf{315^\circ\leqq\theta<360^\circ}$

(2)　真数条件より、　$x-4>0$　かつ　$x+6>0$

すなわち　$x>4$　……………　①

このとき

（左辺）$=\log_3(x-4)^2-\log_3(x+6)$

$=\log_3\dfrac{(x-4)^2}{x+6}\leqq 2$

底 $3>1$ より、　$\dfrac{(x-4)^2}{x+6}\leqq 9$

両辺に　$x+6$　(>0)　をかけて

$(x-4)^2\leqq 9(x+6)$

$\Leftrightarrow$　$x^2-17x-38\leqq 0$

$\Leftrightarrow$　$(x+2)(x-19)\leqq 0$

$\Leftrightarrow$　$-2\leqq x\leqq 19$　……………　②

①，②より

$\mathbf{4<x\leqq19}$

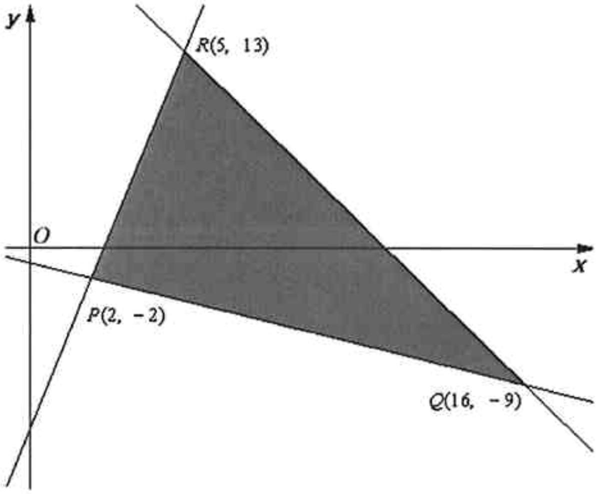
第2問　$-5x+y+12<0 \iff y<5x-12$

$x+2y+2>0 \iff y>-\dfrac{1}{2}x-1$

$2x+y-23<0 \iff y<-2x+23$

$l_1: y=5x-12,\quad l_2: y=-\dfrac{1}{2}x-1,\quad l_3: y=-2x+23$

とする。



(1)　l_1とl_2，l_2とl_3，l_3とl_1の交点を

それぞれP，Q，Rとすると

$P(2,\ -2)$，$Q(16,\ -9)$，$R(5,\ 13)$

であるから、領域Aは右図。

（境界は含まない）

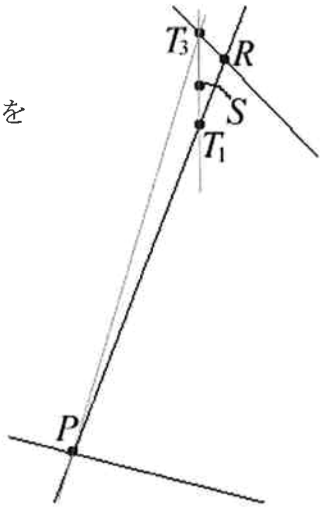
(2)　$l_4: (-6k+2)x+ky+15k-9=0$

とすると、l_4はkの値に関わらず

点$S\left(\dfrac{9}{2},\ 12\right)$ を通る。

また、直線 $2x-9=0 \iff x=\dfrac{9}{2}$ とl_1，l_3の交点をそれぞれT_1，T_3とすると

$T_1\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{21}{2}\right)$，$T_3\left(\dfrac{9}{2},\ 14\right)$ である。



領域Bが領域Aを含むためには、直線l_4が線分PR（両端を除く）と交点を持たなければよい。そのためには

$f(x,\ y)=(-6k+2)x+ky+15k-9$　とおいて

$f(5,\ 13)=-2k+1\leqq 0$ かつ $f(2,\ -2)=k-5\leqq 0$

であればよい。

$\therefore\ \ \mathbf{\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 5}$

第3問 (1) $\overrightarrow{OA}=(4,\ -2,\ 2)$, $\overrightarrow{OB}=(-3,\ 6,\ 6)$

$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす $s,\ t$ が存在すれば、4点 $O,\ A,\ B,$ C は同一平面上にある。

$s(4,\ -2,\ 2)+t(-3,\ 6,\ 6)=(0,\ 3,\ 5)$ より

$$\begin{cases} 4s-3t=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ -2s+6t=3 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 2s+6t=5 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①, ②より $s=\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{2}{3}$ でこれは③をも満たす。つまり

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ と表せるので、$O,\ A,\ B,$ C は同一平面上にある。(証明終)

(2) (1)の平面に垂直なベクトルを $\vec{x}=(x,\ y,\ z)$ とすると、$\vec{x}\perp\overrightarrow{OA}$, $\vec{x}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから、

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OA}=4x-2y+2z=0 \iff 2x-y+z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OB}=-3x+6y+6z=0 \iff x-2y-2z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$

④×2＋⑤ $5x-4y=0$ $y=\dfrac{5}{4}x$

④×2－⑤ $3x+4z=0$ $z=-\dfrac{3}{4}x$

$$\therefore\ \vec{x}=\left(x,\ \frac{5}{4}x,\ -\frac{3}{4}x\right)=k(4,\ 5,\ -3)$$

したがって、$\vec{a}=(4,\ 5,\ -3)$ は(1)の平面に垂直であり、直線 l の平行ベクトルでもあるので、点 D は直線 l 上にあり

$$\overrightarrow{OD}=m\vec{a}=(4m,\ 5m,\ -3m)$$

と表せる。

OD つまり

$$\left|\overrightarrow{OD}\right|^2=(4m)^2+(5m)^2+(-3m)^2=50m^2=2^2 \qquad \therefore\ m=\pm\frac{\sqrt{2}}{5}$$

このとき、$\overrightarrow{OD}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{5}(4,\ 5,\ -3)$ であるから

$$D\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{5},\ \pm\sqrt{2},\ \mp\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$$ （複号同順）

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-7,\ 8,\ 4)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-4,\ 5,\ 3)$

$\therefore\quad \left|\overrightarrow{AB}\right|^2=(-7)^2+8^2+4^2=129$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(-4)^2+5^2+3^2=50$

$\therefore$（$\triangle ABC$ の面積）$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$

$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

（四面体 ABCD の体積）$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{3}}$

第4問 (1) $n \geqq 2$ のとき

$$S_{n+1}-3S_n=n^2$$
$$S_n-3S_{n-1}=(n-1)^2$$

辺々引いて

$$S_{n+1}-S_n-3(S_n-S_{n-1})=2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_{n+1}-3a_n=2n-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$n=1$ のとき

$$S_2-3S_1=1$$

$$a_1+a_2-3a_1=1$$

$$\therefore \ a_2-3a_1=-a_1+1=1 \quad (\because a_1=0)$$

したがって、$n=1$ のときも①は成り立つ。

ゆえに、すべての自然数 n に対して

$$\boldsymbol{a_{n+1}-3a_n=2n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

(2) ②を変形すると

$$a_{n+1}+(n+1)=3(a_n+n)$$

ここで、数列$\{a_n+n\}$は初項 $a_1+1=1$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n+n=1\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n=3^{n-1}-n}$$