徳島大学
総合科学部
数学 201

第 1 問

(1)

一般項を a_n とおくと

$$a_n = 5n + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5n - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{5k + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\} = \frac{5}{2}n(n+1) + \frac{3}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{5}{2}n(n+1) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots(答)$$

(2)

(a)

A → P の経路は　$_6C_3 = 20$ 通り

P → C の経路は　$_6C_2 = 15$ 通り

A → P → C の経路は　$20 \times 15 = 300$ 通り　…(答)

(b)

P → B の経路は　$_5C_2 = 10$ 通り

B → C の経路は　1 通り

C → Q の経路は　$_3C_2 = 3$ 通り

P → B → C → Q の経路は　$10 \times 1 \times 3 = 30$ 通り　…(答)

(c)

点 C の 1 マス西側の点を D とおくと

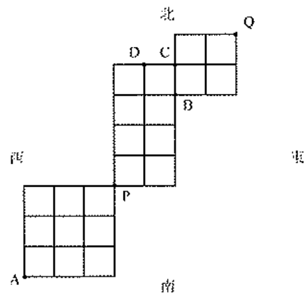
(P → Q の経路の数) = (P → B → Q の経路の数)

+(P → D → Q の経路の数)

$= 10 \times {}_4C_2 + {}_5C_1 \times 1 \times {}_3C_2$

$= 10 \times 6 + 5 \times 3$

$= 75$ 通り　…(答)



第２問

(1)

題意より

$$\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$$

余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 60^\circ$$

(ただし, $\mathrm{AB}=4$ ， $\mathrm{AC}=3$ ， $\mathrm{BC}>0$ である)

これを整理すると $\mathrm{BC}=\sqrt{13}$ なので

$$\mathrm{BM}=\frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \cdots (答)$$

(2)

中線定理より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

(ただし, $\mathrm{AB}=4$ ， $\mathrm{AC}=3$ ， $\mathrm{BM}=\frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $\mathrm{AM}>0$ である)

これを整理して

$$\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{37}}{2} \qquad \cdots (答)$$

(3)

$$\begin{cases} \triangle\mathrm{ABM}\text{ の面積}\quad S_1 \\ \triangle\mathrm{ACM}\text{ の面積}\quad S_2 \\ \triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}\quad S_3 \end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases} S_1=S_2 \\ S_3=S_1+S_2=2S_1 \end{cases}$$

がいえる. また

$$\begin{aligned} S_3&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{A} \\ &=3\sqrt{3}\quad (\because \mathrm{AB}=4,\ \mathrm{AC}=3,\ \angle\mathrm{A}=60^\circ) \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\triangle\mathrm{ABM}\text{ の面積 } S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots (答)$$

第 3 問

(1)

$$z^2 = (z-1-i)^2$$

$$(2z-1-i)(1+i) = 0$$

$1+i \neq 0$ より

$$2z-1-i = 0$$

$$\therefore \quad z = \frac{1+i}{2} \qquad \cdots (答)$$

(2)

$|z|^2 = |z-1-i|^2$ に $z = x+yi$ を代入して

$$|x+yi|^2 = |(x-1)+(y-1)i|^2$$

$$x^2+y^2 = (x-1)^2+(y-1)^2$$

$$\therefore \quad x+y = 1 \qquad \cdots (答)$$

(3)

$z^n = (z-1-i)^n \quad \cdots$①より

$$|z^n| = |(z-1-i)^n|$$

$$|z|^n = |z-1-i|^n$$

$$\therefore \quad |z| = |z-1-i|$$

ここで (2) より $x+y=1$ であり, また z は実数なので $y=0$ である.
したがって, $x=1$ であり, これを①に代入して

$$
\begin{aligned}
& 1 = (-i)^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = (\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = \cos(270^\circ \times n) + i\sin(270^\circ \times n) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \cos(270^\circ \times n) = 1 \\ \sin(270^\circ \times n) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & 270^\circ \times n = 360^\circ \times k \quad (k \text{ は自然数}) \\
\Leftrightarrow \quad & n = \frac{4}{3}k \quad (k \text{ は自然数})
\end{aligned}
$$

n は自然数なので k は 3 の倍数となり

$$n = 4l \quad (l \text{ は自然数}) \qquad \cdots (答)$$

第 4 問

(1)

点 P を (t, t^2+3t+4) とおくと, △ABP の重心は $\left(\dfrac{t+3}{3}, \dfrac{t^2+3t+9}{3}\right)$ となる.

ここで, $G(x,y)$ とおくと

$$x=\frac{t+3}{3} \quad , \quad y=\frac{t^2+3t+9}{3}$$

この 2 式より t を消去すると $y=3x^2-3x+3$ となり

$$C_2 : y=3x^2-3x+3 \qquad \cdots (\text{答})$$

(2)

C_1 と C_2 の交点は, $x^2+3x+4=3x^2-3x+3$ より

$$2x^2-6x-1=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}} \left\{\left(x^2+3x+4\right)-\left(3x^2-3x+3\right)\right\}dx \\
&= \int_{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}} \left(-2x^2+6x+1\right)dx \\
&= -\frac{1}{6}\cdot(-2)\left(\frac{3+\sqrt{11}}{2}-\frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{11\sqrt{11}}{3} \qquad \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$