徳島大学
医学部医学科・歯学部・薬学部
数学 202

第 1 問

(1)

$$z^2 = (z-1-i)^2$$
$$(2z-1-i)(1+i) = 0$$

$1+i \neq 0$ より

$$2z-1-i = 0$$
$$\therefore \quad z = \frac{1+i}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)

$|z|^2 = |z-1-i|^2$ に $z = x+yi$ を代入して

$$|x+yi|^2 = |(x-1)+(y-1)i|^2$$
$$x^2+y^2 = (x-1)^2+(y-1)^2$$
$$\therefore \quad x+y = 1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)

$z^n = (z-1-i)^n \quad \cdots$①より

$$|z^n| = |(z-1-i)^n|$$
$$|z|^n = |z-1-i|^n$$
$$\therefore \quad |z| = |z-1-i|$$

ここで (2) より $x+y=1$ であり, また z は実数なので $y=0$ である.
したがって, $x=1$ であり, これを①に代入して

$$
\begin{aligned}
& 1 = (-i)^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = (\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = \cos(270^\circ \times n) + i\sin(270^\circ \times n) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \cos(270^\circ \times n) = 1 \\ \sin(270^\circ \times n) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & 270^\circ \times n = 360^\circ \times k \quad (k\text{ は自然数}) \\
\Leftrightarrow \quad & n = \frac{4}{3}k \quad (k\text{ は自然数})
\end{aligned}
$$

n は自然数なので k は 3 の倍数となり

$$n = 4l \quad (l\text{ は自然数}) \qquad \cdots(\text{答})$$

第２問

(1)

<u>証明</u>

$$f'(x)=\left(\frac{A+x}{n+1}\right)^n-\left(\frac{A}{n}\right)^n$$

$f'(x)=0$ のとき

$$\left(\frac{A+x}{n+1}\right)^n=\left(\frac{A}{n}\right)^n$$

$x>0,\ A>0,\ n>0$ より

$$\frac{A+x}{n+1}=\frac{A}{n}$$

$$\therefore\quad x=\left(\frac{n+1}{n}-1\right)A=\frac{A}{n}$$

増減表

x	0	$\cdots$	$\frac{A}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$$f\left(\frac{A}{n}\right)=\left(\frac{A+\frac{A}{n}}{n+1}\right)^{n+1}-\left(\frac{A}{n}\right)^n\cdot\frac{A}{n}$$
$$=\left(\frac{A}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{A}{n}\right)^{n+1}=0$$

$$\therefore\quad f(x)\geq 0$$

□

(2)

<u>証明</u>

i)　$n=1$ のとき

左辺$=a_1$, 右辺$=a_1$ より左辺=右辺となり, 成り立つ.

ii)　$n=k$ のとき（k は自然数）

$\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\geq a_1a_2\cdots a_k$　$\cdots$①が成り立つと仮定する.

ここで, (1) の式に $A=a_1+a_2+\cdots+a_k,\ x=a_{k+1},\ n=k$ を代入すると

$$f(a_{k+1})=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}-\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\cdot a_{k+1}\geq 0$$

$$\therefore\quad \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}\geq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\cdot a_{k+1}$$
$$\geq a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\quad(\because ①)$$

よって, $n=k+1$ のときも①が成り立つ.

したがって, すべての自然数 n において与えられた不等式は成り立つ.

□

第 3 問

(1)

底面の半径を r とすると, $2\pi r = \theta$ より $r = \frac{\theta}{2\pi}$
よって, 底面積は

$$\pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 = \frac{\theta^2}{4\pi}$$

また, 高さは

$$h = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}}$$

したがって

$$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{\theta^2}{4\pi^2}\sqrt{1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}}$$

$$= \frac{\theta^2}{12\pi}\sqrt{1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{\theta^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)

$$V'(\theta) = \frac{2\theta}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2} + \frac{\theta^2}{24\pi^2}\cdot\frac{-2\theta}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}$$

$$= \frac{\theta}{24\pi^2}\left(2\sqrt{4\pi^2-\theta^2} - \frac{\theta^2}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)$$

$$= \frac{\theta}{24\pi^2}\left(\frac{8\pi^3-3\theta^2}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)$$

$V'(\theta) = 0$ のとき

$$\theta = 0 \quad \text{または} \quad 8\pi^3 - 3\theta^2 = 0$$

$0 < \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

増減表

θ	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$V'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$V(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$	$\searrow$	

$$V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right) = \frac{\frac{8}{3}\pi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\frac{8}{3}\pi^2} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

以上より, 最大値は

$$\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \text{のとき} \quad \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi \qquad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

(1)

$x=0$ のとき $y=1$ である.

$$f(a)=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(ax+\frac{1}{1+x^2}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left\{a^2x^2+\frac{2ax}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}\right\}dx$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}a^2x^2dx=\left[\frac{1}{3}a^2x^3\right]_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}a^2 \quad \cdots ①$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2ax}{1+x^2}dx=\left[a\log(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}}=2a\log 2 \quad \cdots ②$$

$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ③$$

①, ②, ③より

$$f(a)=\sqrt{3}\pi a^2+2\pi a\log 2+\frac{\pi^2}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\pi \quad \cdots (答)$$

(2)

(1) より

$$f'(a)=2\sqrt{3}\pi a+2\pi\log 2$$

$f'(a)=0$ のとき

$$2\pi(\sqrt{3}a+\log 2)=0$$
$$\therefore\quad a=-\frac{\log 2}{\sqrt{3}}$$

増減表

a	$\cdots$	$-\frac{\log 2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	最小	↗

よって, $f(a)$ が最小となる a は

$$\therefore\quad a=-\frac{\log 2}{\sqrt{3}} \quad \cdots (答)$$