徳島大学
医学部保健学科・工学部
数学 203

第 1 問

(1)

$$3na_{n+1} = (n+1)a_n$$
$$3\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right) = \frac{a_n}{n}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ より

$$3b_{n+1} = b_n \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$$
$$b_1 = \frac{a_1}{1} = 2$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 2, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列なので

$$b_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \cdots (\text{答})$$

(2)

$$\frac{a_n}{n} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$a_n = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \cdots (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left\{2(k+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{1}{3}\cdot 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

第２問

(1)

$$z^2 = (z-1-i)^2$$
$$(2z-1-i)(1+i) = 0$$

$1+i \neq 0$ より

$$2z-1-i = 0$$
$$\therefore \quad z = \frac{1+i}{2} \qquad \cdots(答)$$

(2)

$|z|^2 = |z-1-i|^2$ に $z = x+yi$ を代入して

$$|x+yi|^2 = |(x-1)+(y-1)i|^2$$
$$x^2+y^2 = (x-1)^2+(y-1)^2$$
$$\therefore \quad x+y = 1 \qquad \cdots(答)$$

(3)

$z^n = (z-1-i)^n \quad \cdots①$より

$$|z^n| = |(z-1-i)^n|$$
$$|z|^n = |z-1-i|^n$$
$$\therefore \quad |z| = |z-1-i|$$

ここで (2) より $x+y=1$ であり, また z は実数なので $y=0$ である.
したがって, $x=1$ であり, これを①に代入して

$$
\begin{aligned}
& 1 = (-i)^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = (\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = \cos(270^\circ \times n) + i\sin(270^\circ \times n) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \cos(270^\circ \times n) = 1 \\ \sin(270^\circ \times n) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & 270^\circ \times n = 360^\circ \times k \quad (k \text{ は自然数}) \\
\Leftrightarrow \quad & n = \frac{4}{3}k \quad (k \text{ は自然数})
\end{aligned}
$$

n は自然数なので k は 3 の倍数となり

$$n = 4l \quad (l \text{ は自然数}) \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

(1)

点 P を (t, t^2+3t+4) とおくと, $\triangle$ABP の重心は $\left(\dfrac{t+3}{3}, \dfrac{t^2+3t+9}{3}\right)$ となる.

ここで, $G(x, y)$ とおくと

$$x = \frac{t+3}{3} \quad , \quad y = \frac{t^2+3t+9}{3}$$

この 2 式より t を消去すると $y = 3x^2 - 3x + 3$ となり

$$C_2 : y = 3x^2 - 3x + 3 \qquad \cdots (答)$$

(2)

C_1 と C_2 の交点は, $x^2 + 3x + 4 = 3x^2 - 3x + 3$ より

$$2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2}$$

よって, 求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}} \left\{\left(x^2+3x+4\right) - \left(3x^2-3x+3\right)\right\} dx$$

$$= \int_{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}} \left(-2x^2+6x+1\right) dx$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot (-2)\left(\frac{3+\sqrt{11}}{2} - \frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{11\sqrt{11}}{3} \qquad \cdots (答)$$

第 4 問

(1)

底面の半径を r とすると, $2\pi r = \theta$ より $r = \frac{\theta}{2\pi}$

よって, 底面積は

$$\pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 = \frac{\theta^2}{4\pi}$$

また, 高さは

$$h = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}}$$

したがって

$$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{\theta^2}{4\pi^2}\sqrt{1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}}$$

$$= \frac{\theta^2}{12\pi}\sqrt{1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{\theta^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2} \qquad \cdots(答)$$

(2)

$$V'(\theta) = \frac{2\theta}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\theta^2} + \frac{\theta^2}{24\pi^2}\cdot\frac{-2\theta}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}$$

$$= \frac{\theta}{24\pi^2}\left(2\sqrt{4\pi^2-\theta^2} - \frac{\theta^2}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)$$

$$= \frac{\theta}{24\pi^2}\left(\frac{8\pi^3-3\theta^2}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)$$

$V'(\theta) = 0$ のとき

$$\theta = 0 \quad または \quad 8\pi^3 - 3\theta^2 = 0$$

$0 < \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

増減表

θ	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$V'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$V(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$	$\searrow$	

$$V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right) = \frac{\frac{8}{3}\pi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\frac{8}{3}\pi^2} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

以上より, 最大値は

$$\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi のとき \quad \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi \qquad \cdots(答)$$