徳島大学２次試験　解答例速報（数学２０１　その１）

(1) (ⅰ) $f(x)=x^2+(4-2k)x+2k^2-8k+4$ とおく．

C が y 軸の正の部分と交わるから

$$f(0)=2k^2-8k+4>0$$

$$k^2-4k+2>0$$

$$k<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<k. \ \cdots\cdots\text{(答)}$$

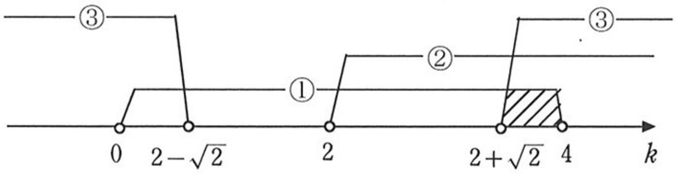
(ⅱ) $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha \fallingdotseq \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2k-4,\ \alpha\beta=2k^2-8k+4.$$

$f(x)$ の判別式を D とおくと，$f(x)=0$ が異なる２つの正の実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつ条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=-k(k-4)>0 \\ \alpha+\beta=2(k-2)>0 \\ \alpha\beta=2(k^2-4k+2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0<k<4 & \cdots\cdots① \\ k>2 & \cdots\cdots② \\ k<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

$$\iff 2+\sqrt{2}<k<4. \ \cdots\cdots\text{(答)}$$



(2) $P(x)$ を x^2-x-2 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b. \ \cdots\cdots④$$

$P(x)$ を x^2-2x で割った商を $Q'(x)$ とおくと，割った余りが $-6x-4$ より

$$P(x)=x(x-2)Q'(x)-6x-4. \ \cdots\cdots⑤$$

⑤より，　　$P(2)=-16.$

$P(x)$ を $x+1$ で割った余りが -1 より，④に代入して

$$P(-1)=-a+b=-1. \ \cdots\cdots⑥$$

$P(2)=-16$ より，④に代入して

$$P(2)=2a+b=-16. \ \cdots\cdots⑦$$

⑥, ⑦を解いて

$$a=-5,\ b=-6.$$

したがって，$P(x)$ を x^2-x-2 で割った余りは

$$-5x-6. \ \cdots\cdots\text{(答)}$$

$$S_n = 2n + 3a_n$$

(1)　$n=1$ のとき　$a_1 = 2 + 3a_1 \iff a_1 = -1.$

　　$n=2$ のとき　$a_1 + a_2 = 4 + 3a_2 \iff -1 + a_2 = 4 + 3a_2$

$$\iff a_2 = -\frac{5}{2}.$$

したがって，　$a_1 = -1,\ a_2 = -\dfrac{5}{2}.$ ……(答)

(2)

$$\begin{array}{rl} & S_{n+1} = 2(n+1) + 3a_{n+1} \\ -) & S_n = 2n \quad + \quad 3a_n \\ \hline & S_{n+1} - S_n = 2 + 3a_{n+1} - 3a_n \end{array}$$

$$a_{n+1} = 2 + 3a_{n+1} - 3a_n$$

$$2a_{n+1} = 3a_n - 2$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - 1. \text{ ……(答)}$$

(3)　(2)より　$a_{n+1} - 2 = \dfrac{3}{2}(a_n - 2).$

これより，数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -3$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列となるから

$$a_n - 2 = -3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = -3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 2. \text{ ……(答)}$$

よって　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + 2\right\}$

$$= \frac{-3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} + 2n$$

$$= -6\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2n + 6. \text{ ……(答)}$$

(1) $$y^2 \leqq 20 \iff -\sqrt{20} \leqq y \leqq \sqrt{20}.$$

$4<\sqrt{20}<5$ を満たし，y は整数であるから

$$-4 \leqq y \leqq 4.$$

よって，$y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 9 個．……(答)

(2) $x=2$ のとき

$$y^2 \leqq 16 \iff -4 \leqq y \leqq 4.$$

y は整数であるから，$x=2$ のとき $x^2+y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 9 個．……(答)

(3) (i) $x=0,\ \pm1,\ \pm2$ のとき

$0 \leqq x^2 \leqq 4$ であるから，$16 \leqq 20-x^2 \leqq 20$．

よって，$y^2 \leqq 20-x^2$ を満たす整数 y は

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 9 個．

(ii) $x=\pm3$ のとき

$$y^2 \leqq 11 \iff -\sqrt{11} \leqq y \leqq \sqrt{11}.$$

$3<\sqrt{11}<4$ を満たし，y は整数であるから，

$x=\pm3$ のとき $x^2+y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ の 7 個．

(iii) $x=\pm4$ のとき

$$y^2 \leqq 4 \iff -2 \leqq y \leqq 2.$$

y は整数であるから，$x=\pm4$ のとき $x^2+y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の 5 個．

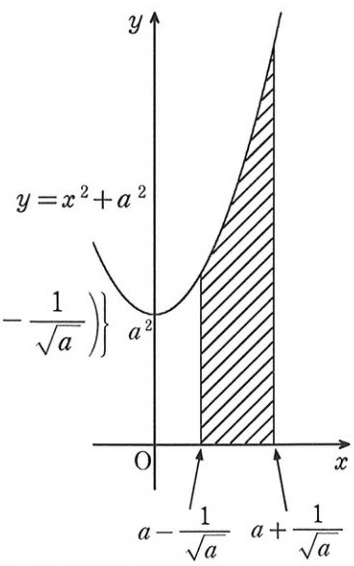
(iv) $|x| \geqq 5$ のとき

$y^2 \leqq -5$ より，これを満たす整数 y は存在しない．

(i)～(iv)より，条件を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数（S の要素の個数）は

$5\times9+2\times7+2\times5=69$ 個．……(答)

(1)　すべての x について $y>0$ より，求める面積 S は



$$S=\int_{a-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{a+\frac{1}{\sqrt{a}}}(x^2+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_{a-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{a+\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(a+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3-\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3\right\}+a^2\left\{\left(a+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)-\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\}$$

$$=4a\sqrt{a}+\frac{2}{3a\sqrt{a}}$$

$$=4a\sqrt{a}+\frac{2\sqrt{a}}{3a^2}.\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$a>0$ より，$4a\sqrt{a}>0$, $\dfrac{2}{3a\sqrt{a}}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)を利用して

$$S=4a\sqrt{a}+\frac{2}{3a\sqrt{a}}\geqq 2\sqrt{4a\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3a\sqrt{a}}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

等号成立は $4a\sqrt{a}=\dfrac{2}{3a\sqrt{a}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ のときより

$$a\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$a^3=\frac{1}{6}.$$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}.$

よって，　$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$ のとき　S の最小値は　$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. ……(答)