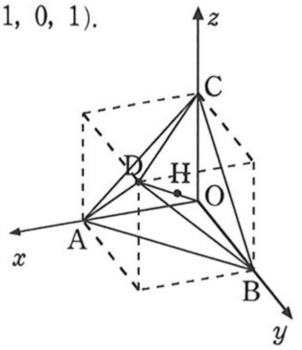


(1) $\overrightarrow{OD}=(1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{CA}=(-1,\ 0,\ 1)$.

ここで

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot0=0,\ \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1=0,\ \cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CA}=1\cdot(-1)+1\cdot0+1\cdot1=0.\ \cdots\cdots③$$

$\overrightarrow{OD}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{CA}\neq\vec{0}$ であるから，①,②,③より

$$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{CA}.\ \boxed{終}$$

(2) 線分 OD 上の点で，３点 A, B, C が作る平面との交点を H とおくと

$$\overrightarrow{OH}=(1-t-s)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}\ (s,\ t\ \text{は実数})\cdots\cdots④$$

とおける．

$\overrightarrow{OD}/\!/\overrightarrow{OH}$ より，$\overrightarrow{OH}$ は３点 A, B, C が作る平面に対して垂直だから，

$$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BC}.$$

よって

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\{(1-t-s)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=-(1-t-s)+t$$
$$=2t+s-1=0.\ \cdots\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=\{(1-t-s)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=-t+s=0.\ \cdots\cdots⑥$$

⑤,⑥より

$$s=t=\frac{1}{3}.$$

これを④に代入して

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

よって，求める座標 H は

$$\mathrm{H}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ であるから，

$$\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\mathrm{OD},\ \ \mathrm{DH}=\mathrm{OD}-\mathrm{OH}=\frac{2}{3}\mathrm{OD}.$$

よって，OH，DH は△ABC が作る平面に垂直だから

$$(\text{四角形OABCの体積}):(\text{四角形DABCの体積})=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}:\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}$$
$$=\mathrm{OH}:\mathrm{DH}=1:2.\ \cdots\cdots(\text{答})$$

徳島大学２次試験　解答例速報（数学２０２　その２）

(1)

$$f'(x)=2\sin x-2\sin 2x$$
$$=2\sin x-4\sin x\cos x$$
$$=2\sin x(1-2\cos x).$$

$f'(x)=0$ のとき　　$\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{2}$

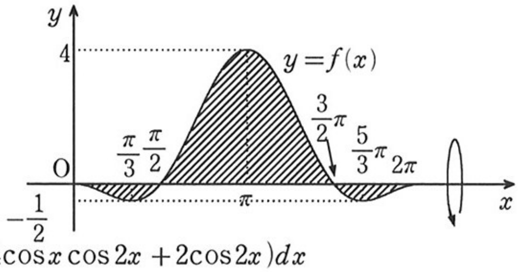
$$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi.$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

増減表より，　$x=\pi$ のとき　最大値 4,　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{2}$. ……(答)

(2) $f(\pi-x)=f(\pi+x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは $x=\pi$ について対称なグラフである．

よって，求める体積を V とおくと



$$V=\pi\int_0^{2\pi}(1-2\cos x+\cos 2x)^2dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}(1-2\cos x+\cos 2x)^2dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}(1+4\cos^2 x+\cos^2 2x-4\cos x-4\cos x\cos 2x+2\cos 2x)dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}\left\{1+4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}-4\cos x-4\cdot\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)+2\cos 2x\right\}dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos 4x-2\cos 3x+4\cos 2x-6\cos x+\frac{7}{2}\right)dx$$
$$=2\pi\left[-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{2}{3}\sin 3x+2\sin 2x-6\sin x+\frac{7}{2}x\right]_0^{\pi}$$
$$=2\pi\cdot\frac{7}{2}\pi$$
$$=7\pi^2.$$ ……(答)

(1) $$g:\begin{pmatrix}\cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ)\\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.\ \cdots\cdots(答)$$

(2) g の一次変換を表す行列を C とする．$\left(すなわち\ C=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$．

$\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{p_n}$，$\overrightarrow{OQ_n}=\overrightarrow{q_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおくと，条件より

$$\overrightarrow{p_{n+1}}=A\overrightarrow{p_n},$$
$$\overrightarrow{q_n}=C\overrightarrow{p_n},$$
$$\overrightarrow{q_{n+1}}=C\overrightarrow{p_{n+1}}=C\left(A\overrightarrow{p_n}\right)=CA\overrightarrow{p_n}.\ \cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{q_{n+1}}=B\overrightarrow{q_n}$ となるから

$$\overrightarrow{q_{n+1}}=B\overrightarrow{q_n}=B\left(C\overrightarrow{p_n}\right)=BC\overrightarrow{p_n}.\ \cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{p_{n+1}}=A\overrightarrow{p_n}$ より　$\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{p_2}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{7}{4}\end{pmatrix}$.

$CA\overrightarrow{p_n}=BC\overrightarrow{p_n}\iff(CA-BC)\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$ であるから，$(CA-BC)\overrightarrow{p_1}=\vec{0}$ と $(CA-BC)\overrightarrow{p_2}=\vec{0}$ より

$$(CA-BC)\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ 2 & \dfrac{7}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff CA-BC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ 2 & \dfrac{7}{4}\end{pmatrix}^{-1}=O$$
$$\iff CA=BC.$$

よって

$$\begin{aligned}&CA=BC\\ \iff\ &B=CAC^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&7\end{pmatrix}\right\}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\right\}\\ &=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}8&8\sqrt{3}\\-4\sqrt{3}&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}32&0\\0&16\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1&0\\0&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.\ \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ より　$\overrightarrow{q_1}=C\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{q_{n+1}}=B\overrightarrow{q_n}$ より　$\overrightarrow{q_n}=B^{n-1}\overrightarrow{q_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$.

$C\overrightarrow{p_n}=\overrightarrow{q_n}$ より　$\overrightarrow{p_n}=C^{-1}\overrightarrow{q_n}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\\ \dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\end{pmatrix}$.

よって，　$P_n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n},\ \dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right)$. $\cdots\cdots$(答)

(1)　A→B，A→D 方向への１格子分の移動をそれぞれ X，Y で表す．

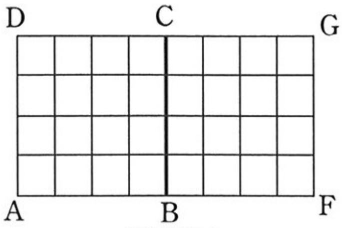
A→C の移動は，X を4 個，Y を 4 個合わせて 8 個を一列に並べて表される移動だから

$$\frac{8!}{4!4!}=70 \text{ 通り．}$$

ここで，C→G の移動は１通りだから，A→C→G の道筋は

$$70\times1=70 \text{ 通り．}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　展開図１より，A から BC 上の点を通り G に至る道筋を考える．

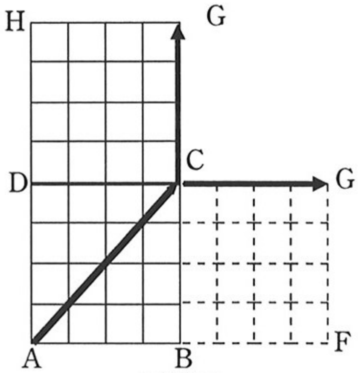


展開図１

展開図１において，A→G の移動は X を8 個，Y を 4 個合わせて 12 個を一列に並べて表される移動だから

$$\frac{12!}{8!4!}=495 \text{ 通り．}\cdots\cdots(\text{答})①$$

(3)　展開図２より，A から DC 上の点を通り G に至る道筋を考える．



展開図２

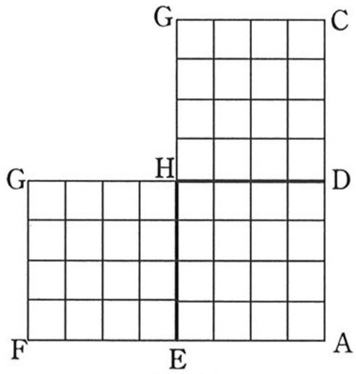
展開図２において，A→G の移動は X を4 個，Y を 8 個合わせて 12 個を一列に並べて表される移動だから

$$\frac{12!}{4!8!}=495 \text{ 通り．}\cdots\cdots②$$

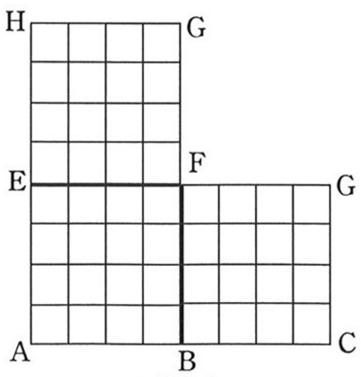
①，②の場合に重なる部分が A→C→G の 70 通りの移動であるから，A から BC, CD 上の点を通って G に至る道筋(これを道筋 R_1 とおく)の個数は

$$2\times495-70=920 \text{ 通り．}\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)



展開図３



展開図４

(i)　A から HD, HE 上の点を通って G に至る道筋(これを道筋 R_2 とおく)の個数を求める．

展開図３において，A→G の道筋(A→H→G の重なる部分を除く)であるから

$$2\times495-70=920 \text{ 通り．}$$

(ii)　A から EF, FB 上の点を通って G に至る道筋(これを道筋 R_3 とおく)の個数を求める．

展開図４において，A→G の道筋(A→F→G の重なる部分を除く)であるから

$$2\times495-70=920 \text{ 通り．}$$

道筋 R_1，R_2，R_3 のうちで重なっている道筋は

A→D→G，　A→E→G，　A→B→G

であり，それが各々 70 通りずつあるから，求める道筋は

$$3\times920-3\times70=2550 \text{ 通り．}\cdots\cdots(\text{答})$$