徳島大学２次試験　解答例速報（数学２０３　その１）

(1)
$$y^2 \leqq 20 \iff -\sqrt{20} \leqq y \leqq \sqrt{20}.$$
$4 < \sqrt{20} < 5$ を満たし，y は整数であるから
$$-4 \leqq y \leqq 4.$$
よって，$y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，
$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ の } 9 \text{ 個.}$$ ……(答)

(2) $x=2$ のとき
$$y^2 \leqq 16 \iff -4 \leqq y \leqq 4.$$
y は整数であるから，$x=2$ のとき $x^2+y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，
$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ の } 9 \text{ 個.}$$ ……(答)

(3) (i) $x=0,\ \pm1,\ \pm2$ のとき

$0 \leqq x^2 \leqq 4$ であるから，$16 \leqq 20-x^2 \leqq 20$.

よって，$y^2 \leqq 20-x^2$ を満たす整数 y は
$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ の } 9 \text{ 個.}$$

(ii) $x=\pm3$ のとき
$$y^2 \leqq 11 \iff -\sqrt{11} \leqq y \leqq \sqrt{11}.$$
$3 < \sqrt{11} < 4$ を満たし，y は整数であるから，

$x=\pm3$ のとき $x^2+y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ の 7 個.

(iii) $x=\pm4$ のとき
$$y^2 \leqq 4 \iff -2 \leqq y \leqq 2.$$
y は整数であるから，$x=\pm4$ のとき $x^2+y^2 \leqq 20$ を満たす整数 y は，
$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2 \text{ の } 5 \text{ 個.}$$

(iv) $|x| \geqq 5$ のとき

$y^2 \leqq -5$ より，これを満たす整数 y は存在しない.

(i)〜(iv)より，条件を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数（S の要素の個数）は
$$5\times9+2\times7+2\times5=69 \text{ 個.}$$ ……(答)

$$S_n=2n+3a_n$$

(1)　$n=1$ のとき　$a_1=2+3a_1 \iff a_1=-1.$

　$n=2$ のとき　$a_1+a_2=4+3a_2 \iff -1+a_2=4+3a_2$

$$\iff a_2=-\frac{5}{2}.$$

したがって，　$a_1=-1$，$a_2=-\dfrac{5}{2}$．……(答)

(2)

$$\begin{array}{rl} & S_{n+1}=2(n+1)+3a_{n+1} \\ -) & S_n=2n \quad + \quad 3a_n \\ \hline & S_{n+1}-S_n=2+3a_{n+1}-3a_n \end{array}$$

$$a_{n+1}=2+3a_{n+1}-3a_n$$

$$2a_{n+1}=3a_n-2$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-1.\ \text{……(答)}$$

(3)　(2)より　$a_{n+1}-2=\dfrac{3}{2}(a_n-2).$

これより，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=-3$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列となるから

$$a_n-2=-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+2.\ \text{……(答)}$$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+2\right\}$

$$=\frac{-3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}+2n$$

$$=-6\left(\frac{3}{2}\right)^n+2n+6.\ \text{……(答)}$$

(1)
$$f'(x)=2\sin x-2\sin 2x$$
$$=2\sin x-4\sin x\cos x$$
$$=2\sin x(1-2\cos x).$$

$f'(x)=0$ のとき　　$\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi.$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	4	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

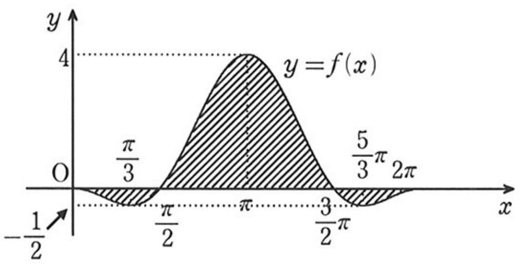
増減表より，　$x=\pi$ のとき　最大値 4，　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{2}$．……(答)

(2)　$f(\pi-x)=f(\pi+x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは $x=\pi$ について対称なグラフである．

$f(x)=0$ のとき　　$1-2\cos x+\cos 2x=0$

$$1-2\cos x+2\cos^2 x-1=0$$
$$2\cos x(\cos x-1)=0$$
$$\cos x=0,\ 1.$$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ であるから　　$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi.$



よって，求める面積を S とおくと

$$S=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos x+\cos 2x)dx+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-2\cos x+\cos 2x)dx$$

$$=-2\left[x-2\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\left[x-2\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=-2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\right)+2\pi-2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\right)$$

$=8.$ ……(答)

(1) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a-1\end{pmatrix}$,

$$A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}-1\\a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+1\\-2a+1\end{pmatrix}.$$

よって，　$\mathrm{Q}(-1,\ a-1)$，$\mathrm{R}(-2a+1,\ -2a+1)$．……(答)

(2) $\overrightarrow{PQ}=(-2,\ a-2)$, $\overrightarrow{QR}=(-2a+2,\ -3a+2)$, $\overrightarrow{RP}=(2a,\ 2a)$.

(i) $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RP}$ のとき

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RP}=-2\cdot 2a+(a-2)\cdot 2a=2a(a-4)=0 \iff a=0,\ 4.$

$a=0$ のとき，　$\overrightarrow{RP}=\vec{0}$ より　$\overrightarrow{PQ}\not\perp\overrightarrow{RP}$ となり適さない．

$a=4$ のとき，　$\overrightarrow{PQ}=(-2,\ 2)$, $\overrightarrow{RP}=(8,\ 8)$ となるから

$\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$ より $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RP}$．

したがって，△PQR は∠P=90°の直角三角形となる．

(ii) $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{QR}$ のとき

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}=-2\cdot(-2a+2)+(a-2)\cdot(-3a+2)=-3a^2+12a-8=0$

$$a=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

$a=2\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=\left(-2,\ \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{QR}=\left(-2\mp\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ -4\mp 2\sqrt{3}\right)$（複号同順）.

$\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$ より $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RP}$．

したがって，△PQR は∠Q=90°の直角三角形となる．

(iii) $\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{RP}$ のとき

$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{RP}=2a\cdot(-2a+2)+2a\cdot(-3a+2)=2a(-5a+4)=0 \iff a=0,\ \dfrac{4}{5}.$

$a=0$ のとき，　$\overrightarrow{RP}=\vec{0}$ より　$\overrightarrow{QR}\not\perp\overrightarrow{RP}$ となり適さない．

$a=\dfrac{4}{5}$ のとき，　$\overrightarrow{QR}=\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$, $\overrightarrow{RP}=\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$ となるから

$\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$ より $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RP}$．

したがって，△PQR は∠R=90°の直角三角形となる．

(i), (ii), (iii)より△PQR が直角三角形となるのは，　$a=4,\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}$．……(答)

(3) $a=4$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=(-2,\ 2)$, $\overrightarrow{PR}=(-8,\ -8)$ より，　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|(-2)\cdot(-8)-2\cdot(-8)|=16.$

$a=\dfrac{4}{5}$ のとき，$\overrightarrow{RP}=\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$, $\overrightarrow{RQ}=\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ より

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{5}\cdot\frac{2}{5}-\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right|=\frac{16}{25}\ (<16).$$

$a=2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$\overrightarrow{QP}=\left(2,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{QR}=\left(-2-\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ -4-2\sqrt{3}\right)$ より

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|2\cdot(-4-2\sqrt{3})-\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-2-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\right|=\frac{16+8\sqrt{3}}{3}\ (<16).$$

$a=2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$\overrightarrow{QP}=\left(2,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{QR}=\left(-2+\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ -4+2\sqrt{3}\right)$ より

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|2\cdot(-4+2\sqrt{3})-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\right|=\frac{16-8\sqrt{3}}{3}\ (<16).$$

よって，$a=4$ のとき△PQR の面積は最大となり

$\mathrm{P}(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$, $\mathrm{R}(-7,\ -7)$ のとき，△PQR の面積は最大値は 16．……(答)