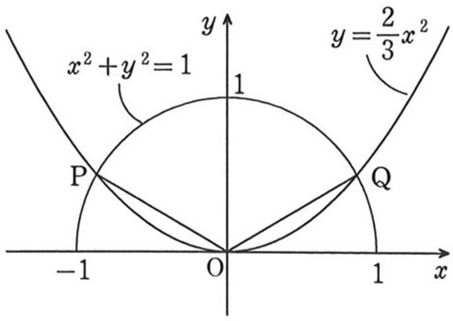
$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x^2 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2=1. & \cdots\cdots② \end{cases}$$



①より $x^2=\dfrac{3}{2}y$ ……①'を②に代入して x^2 を消去すると

$$\frac{3}{2}y+y^2=1 \iff 2y^2+3x^2-2=0$$
$$\iff (2y-1)(y+2)=0$$
$$\iff y=\frac{1}{2},\ y=-2.$$

ここで，$y=\dfrac{2}{3}x^2\ (\geqq 0)$ であるから　　$y=\dfrac{1}{2}$.

このとき，①'から

$$x^2=\frac{3}{4}$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって，

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right) \text{または} \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right). \ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$とおく．

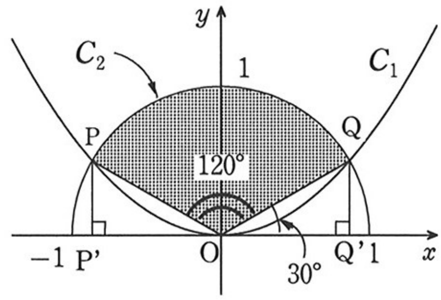
点 Q から x 軸に下ろした垂線の足を Q' とすると

$$\mathrm{OQ'}:\mathrm{QQ'}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}:1$$

であるから　　　$\angle\mathrm{QOQ'}=30^\circ$.

同様に，点P から x 軸に下ろした垂線の足を P' とすると$\angle\mathrm{POP'}=30^\circ$であるから

$$\angle\mathrm{POQ}=120^\circ.$$

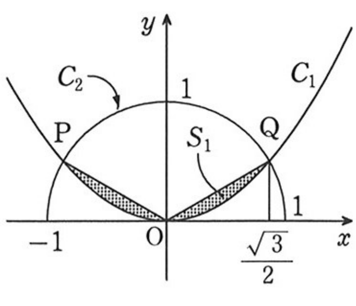


よって，求める面積をSとすると，OQ=1から

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}. \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 直線 OQ：$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ であるから線分 OQ と放物線 C_1 とによって囲まれた部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}x^2\right)dx=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{24}.$$



よって，求める面積を S' とおくと

$$S'=S+2S_1$$
$$=\frac{\pi}{3}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{24}$$
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{12}. \ \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$ (1) 条件より

$$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=36x^2+6ax+2b.$$

$(1,\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{16}{27}\right)$ が変曲点であるから

$$\begin{cases} f''(1)=6a+2b+36=0 \\ f''\left(\dfrac{1}{3}\right)=2a+2b+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-8 \\ b=6. \end{cases}$$

ここで，$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+cx+d$ となり，$y=f(x)$ は $(1,\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{16}{27}\right)$ を通るから

$$\begin{cases} f(1)=c+d+1=0 \\ f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{c}{3}+d+\dfrac{11}{27}=-\dfrac{16}{27} \end{cases} \iff \begin{cases} c+d=-1 \\ \dfrac{c}{3}+d=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ d=-1. \end{cases}$$

$a=-8,\ b=6,\ c=0,\ d=-1$ のとき，$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$ となり

$$f''(x)=12(3x-1)(x-1).$$

x	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	$-\dfrac{16}{27}$	上に凸	0	下に凸

凹凸の表より，確かに $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{16}{27}\right)$, $(1,\ 0)$ は変曲点となる．

よって

$$a=-8,\ b=6,\ c=0,\ d=-1\ .\ \cdots\cdots(答)$$

(2) (1) より $f(x)=12x^4-8x^3+6x^2-1$ であるから

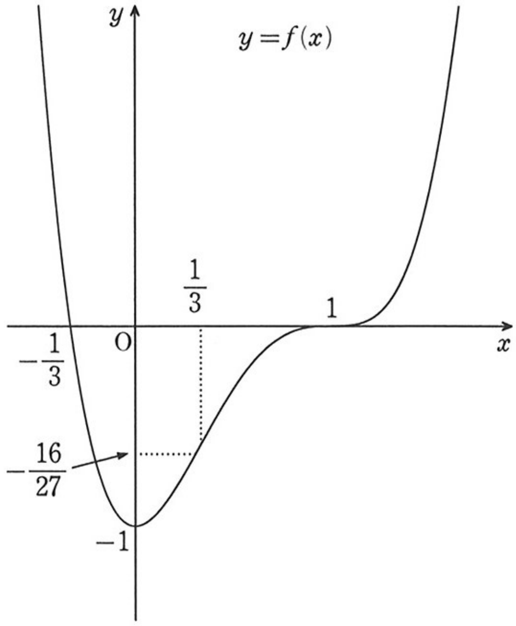
$$f'(x)=12x(x-1)^2,$$
$$f''(x)=12(3x-1)(x-1).$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	$-\dfrac{16}{27}$	↗	0	↗

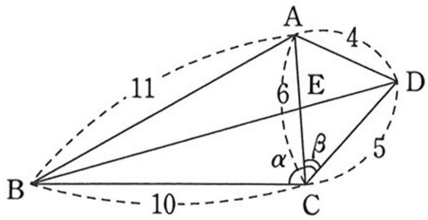
増減表より

$x<0$ のとき　$f(x)$ は単調に減少する，
$0<x$ のとき　$f(x)$ は単調に増加する，
$x<\dfrac{1}{3}$ のとき　$f(x)$ は下に凸のグラフ，
$\dfrac{1}{3}<x<1$ のとき　$f(x)$ は上に凸のグラフ，
$x>1$ のとき　$f(x)$ は下に凸のグラフ．
$\cdots\cdots$(答)

(3) $f(x)=3(x-1)^3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ より，$y=f(x)$ と x 軸との共有点は $(1,\ 0)$, $\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$.
(2) より $y=f(x)$ のグラフは下図となる．



$\boxed{3}$ (1) $\triangle$ABC, $\triangle$ACD において余弦定理より



$$\cos\alpha=\frac{6^2+10^2-11^2}{2\cdot6\cdot10}=\frac{1}{8},\ \cdots\cdots(答)$$

$$\cos\beta=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{4}.\quad\cdots\cdots(答)$$

$0^\circ<\alpha<180^\circ$，$0^\circ<\beta<180^\circ$ より，$\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$ であるから

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}.\ \cdots\cdots(答)$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}.\ \cdots\cdots(答)$$

(2) 加法定理より

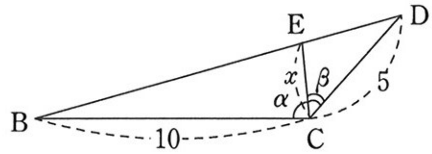
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{9}{16}.\ \cdots\cdots(答)$$

また，$\triangle$BCDにおいて余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2\cdot BD\cdot CD\cdot\cos(\alpha+\beta)\\&=10^2+5^2-2\cdot10\cdot5\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)\\&=\frac{725}{4}.\end{aligned}$$

よって，BD>0であるから

$$BD=\frac{5\sqrt{29}}{2}.\ \cdots\cdots(答)$$



(3) CE$=x$とおくと

(△BCDの面積)=(△BCEの面積)+(△CDEの面積)

より

$$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CE\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot CE\cdot CD\cdot\sin\beta$$

$$10\cdot5\cdot\sin(\alpha+\beta)=10\cdot x\cdot\sin\alpha+x\cdot5\cdot\sin\beta.\ \cdots\cdots①$$

ここで，(2)より

$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(-\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

したがって，これと(1)の結果より①は

$$10\cdot5\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}=10\cdot x\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}+x\cdot5\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$5\sqrt{7}\,x=\frac{125\sqrt{7}}{8}$$

$$x=\frac{25}{8}$$

$$\therefore\ CE=\frac{25}{8}.\ \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{4}$ (1)　すべての自然数 n について

$$a_n > 0 \cdots\cdots (*)$$

であることを，数学的帰納法で証明する．

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=2$ より，明らかに $(*)$ は成り立つ．

(ii)　$n=k$ のときに $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_k > 1.$$

ここで

$$a_{k+1} = \frac{a_k+2}{a_k+1} = 1 + \frac{1}{a_k+1}.$$

$a_k>1$ より $\dfrac{1}{a_k+1} > 0$ であるから

$$a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k+1} > 1.$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つことが証明された．$\boxed{終}$

(2)

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}| = \left|\frac{a_n+2}{a_n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(1-\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2})}{a_n+1}\right| = (\sqrt{2}-1)\left|\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+1}\right|.$$

ここで，$a_n>1$ より

$$a_n+1>2 \iff 0 < \frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{2}.$$

したがって

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}| = (\sqrt{2}-1)\cdot\frac{1}{a_n+1}|a_n-\sqrt{2}| < \frac{\sqrt{2}-1}{2}|a_n-\sqrt{2}|$$

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}| < \frac{\sqrt{2}-1}{2}|a_n-\sqrt{2}|.$$

よって

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}| \leqq \frac{\sqrt{2}-1}{2}|a_n-\sqrt{2}|.$$ $\boxed{終}$

(3)　(2) より

$$|a_n-\sqrt{2}| \leqq \frac{\sqrt{2}-1}{2}|a_{n-1}-\sqrt{2}| \leqq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2|a_{n-2}-\sqrt{2}| \leqq \cdots\cdots \leqq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\sqrt{2}|$$

$$|a_n-\sqrt{2}| \leqq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n.$$

よって

$$0 \leqq |a_n-\sqrt{2}| \leqq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n.$$

$0 < \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} < 1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n = 0.$

挟み打ちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\sqrt{2}| = 0.$

すなわち　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$ ……(答)