$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x-\log x$ とおく．

$x>0$ において

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}.$$

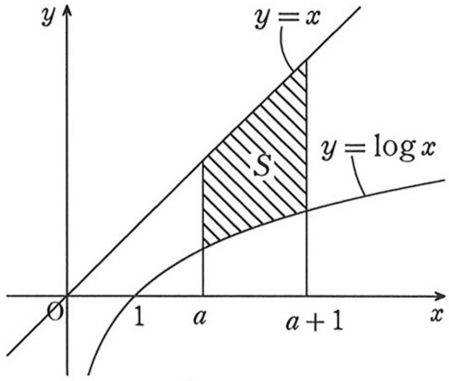
x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

増減表より

$x>0$ において　$f(x)>0$.

すなわち

$x>0$ のとき　$x>\log x$．終



(2) (1)より $y=x$ が $y=\log x$ の上部にあるから

$$\begin{aligned}S&=\int_a^{a+1}(x-\log x)dx\\&=\left[\frac{x^2}{2}-x\log x\right]_a^{a+1}+\int_a^{a+1}x\cdot\frac{1}{x}dx\\&=\frac{(a+1)^2}{2}-(a+1)\log(a+1)-\frac{a^2}{2}+a\log a+\Big[x\Big]_a^{a+1}\\&=a+\frac{3}{2}-(a+1)\log(a+1)+a\log a.\end{aligned}$$ ……(答)

(3) $a>0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da}&=1-\log(a+1)-(a+1)\cdot\frac{1}{a+1}+\log a+a\cdot\frac{1}{a}\\&=1+\log a-\log(a+1).\end{aligned}$$

$\dfrac{dS}{da}=0$ のとき

$$\log\frac{a+1}{a}=1 \iff \frac{a+1}{a}=e \iff a=\frac{1}{e-1}.$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$a=\dfrac{1}{e-1}$ のとき

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{e-1}+\frac{3}{2}-\frac{e}{e-1}\log\frac{e}{e-1}+\frac{1}{e-1}\log\frac{1}{e-1}\\&=\frac{1}{e-1}+\frac{3}{2}-\frac{e}{e-1}+\frac{e-1}{e-1}\log(e-1)\\&=\frac{1}{2}+\log(e-1).\end{aligned}$$

よって，S の最小値は $\dfrac{1}{2}+\log(e-1)$．……(答)

$\boxed{2}$ (1) $a_1=1$ より，　　$a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{3}{a_1}\right)=\dfrac{1}{2}(1+3)=2.$

よって　　$a_2-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}.$

$0<2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}$ より　　$0<a_2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}.$ 終

(2) 2以上の自然数 n について

$$0<a_n-\sqrt{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを，数学的帰納法で証明する．

[1] $n=2$ のとき (1) より (*) が成り立つ．

[2] $n=k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると

$$0<a_k-\sqrt{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}. \quad \cdots\cdots①$$

$a_k>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) を利用して

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{3}{a_k}\right) \geqq \sqrt{a_k\cdot\frac{3}{a_k}}=\sqrt{3}.$$

ここで，$a_{n+1}=\sqrt{3}$ ならば必ず $a_n=\sqrt{3}$ であるから

対偶を使って，$a_n \fallingdotseq\!\!\!\!/\ \sqrt{3}$ ならば $a_{n+1} \neq \sqrt{3}$.

しかも $a_1=1$ より

$$a_n \neq \sqrt{3} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots).$$

よって，$a_{k+1}\neq\sqrt{3}$ となるから

$$a_{k+1}>\sqrt{3} \iff a_{k+1}-\sqrt{3}>0. \quad \cdots\cdots②$$

ここで

$$\left(a_{k+1}-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\left(a_k-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}-a_k+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3}{2a_k}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2a_k}\left(\sqrt{3}-a_k\right)<0.$$

$$\therefore\quad a_{k+1}-\sqrt{3}<\frac{1}{2}\left(a_k-\sqrt{3}\right).$$

①より　　$a_{k+1}-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\left(a_k-\sqrt{3}\right)<\left(\dfrac{1}{2}\right)^k.$

さらに②を用いて　　$0<a_{k+1}-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^k.$

このことから，(*) は $n=k+1$ のときも成り立つ．

[1], [2] より，2以上のすべての自然数 n について，(*) が成り立つことが証明された．

終

(3) (2) より　　$0<a_n-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であり，挟み打ちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{3}\right)=0 \iff \lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}. \quad \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{3}$ (1)　1種類の数字の選び方は　${}_{10}C_1$ 通り．

10枚からその選んだ数字を1枚選ぶ確率は $\dfrac{1}{10}$ であるから，

求める確率は

$${}_{10}C_1\left(\frac{1}{10}\right)^4=\frac{1}{1000}.\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　2種類の数字の選び方は　${}_{10}C_2=45$ 通り．

選んだ2種類の数字の組を $(x,\ y)$ $(x<y)$ とおく．

(i)　$x,\ y$ を2個ずつ並べる並べ方は

$$\frac{4!}{2!2!}=6 \text{ 通り}.$$

(ii)　x を1個，y を3個並べる並べ方は

$$\frac{4!}{1!3!}=4 \text{ 通り}.$$

(iii)　x を 3個，y を1個並べる並べ方は

$$\frac{4!}{3!1!}=4 \text{ 通り}.$$

よって，2種類の数字の取り出し方は

$$45(6+4+4)=630 \text{ 通り}.$$

求める確率は

$$\frac{630}{10^4}=\frac{63}{1000}.\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　3種類の数字の選び方は　${}_{10}C_3=120$ 通り．

選んだ3種類の数字の組を $(x,\ y,\ z)$ $(x<y<z)$ とおく．

(ア)　$x,\ y,\ z$ をそれぞれ 2, 1, 1 個ずつ並べる並べ方は

$$\frac{4!}{2!1!1!}=12 \text{ 通り}.$$

(イ)　$x,\ y,\ z$ をそれぞれ 1, 2, 1 個ずつ並べる並べ方は，同様にして 12 通り．

(ウ)　$x,\ y,\ z$ をそれぞれ 1, 1, 2 個ずつ並べる並べ方は，同様にして 12 通り．

よって，3種類の数字の取り出し方は

$$120(12+12+12)=4320 \text{ 通り}.$$

求める確率は

$$\frac{4320}{10^4}=\frac{54}{125}.\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$ (1)　条件より

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y+ax \\ x+2y-ay \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

この式は任意の $x,\ y$ について成り立つから

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}.$$

行列 X は $AX=B$ を満たすから

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+3 & 3-a \\ a+1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a+3}{2} & \dfrac{3-a}{2} \\ \dfrac{a+1}{2} & \dfrac{a-1}{2} \end{pmatrix}.$$

このとき X の行列式 $\Delta(X)$ は

$$\Delta(X) = \frac{a+3}{2}\cdot\frac{a-1}{2} - \frac{3-a}{2}\cdot\frac{a+1}{2} = \frac{a^2-3}{2}.$$

よって X^{-1} が存在しない条件は

$$\Delta(X) = \frac{a^2-3}{2} = 0 \iff a = \pm\sqrt{3}.\ \cdots\cdots(答)$$

(2)　(1) より a が整数であれば、$\Delta(X) \neq 0$ より，X^{-1} が存在する．

$$X^{-1} = \frac{2}{a^2-3}\begin{pmatrix} \dfrac{a-1}{2} & \dfrac{a-3}{2} \\ -\dfrac{a+1}{2} & \dfrac{a+2}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2-3}\begin{pmatrix} a-1 & a-3 \\ -a-1 & a+3 \end{pmatrix}.\ \cdots\cdots①$$

(i)　$a=1$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,　(v)　$a=-1$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii)　$a=2$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$,　(vi)　$a=-2$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii)　$a=3$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & 0 \\ -\dfrac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$,　(vii)　$a=-3$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} & -1 \\ \dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(iv)　$a=0$ のとき　$X^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & 1 \\ \dfrac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$

よって，$-3 \leqq a \leqq 3$ を満たす整数のうち，条件を満たすのは

$$a = \pm 1,\ \pm 2.$$

X^{-1} の成分がすべて整数であるためには，X^{-1} の $(1,\ 1)$ 成分が $\dfrac{a-1}{a^2-3}$ が整数でなければならない．

$f(a)=\dfrac{a-1}{a^2-3}\ (a \fallingdotseq \pm\sqrt{3})$ とおくと

$$f'(a)=\frac{-a^2+2a-3}{(a^2-3)^2}=\frac{-(a-1)^2-2}{(a^2-3)^2}<0.$$

また

$$\lim_{a\to\infty} f(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}{1-\frac{3}{a^2}}=0,\quad \lim_{a\to-\infty} f(a)=\lim_{a\to-\infty}\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}{1-\frac{3}{a^2}}=0.$$

a	$(-\infty)$	$\cdots$	-3		3	$\cdots$	(∞)
$f'(a)$		$-$				$-$	
$f(a)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\searrow$	(0)

この増減表より

$a \leqq -3$ のとき　$-\dfrac{2}{3} \leqq f(a) < 0$ より　$f(a)$ は整数とならない．

$a \geqq 3$ のとき　　$0 < f(a) \leqq \dfrac{1}{3}$ より　$f(a)$ は整数とならない．

したがって，$|a| \geqq 3$ のとき条件を満たさない．

よって，条件を満たす a の値は

$$a=\pm 1,\ \pm 2.\ \cdots\cdots(答)$$