(1)　A は任意の点 $(x,\ y)$ を $(x,\ -y)$ に移動させる行列だから

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\iff A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\iff A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.\quad(\because\ \text{任意の}\ x,\ y\ \text{に対してだから})$$

B は原点を中心とする角 θ の回転移動を表す行列だから

$$B=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

また，

$$A^{-1}=\frac{1}{1\cdot(-1)-0\cdot0}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=A,$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{aligned}C&=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\-\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta&-2\sin\theta\cos\theta\\2\sin\theta\cos\theta&\cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}.\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$C^3=\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\cos6\theta&-\sin6\theta\\\sin6\theta&\cos6\theta\end{pmatrix}$ であるから

$$C^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\cos6\theta=1\\\sin6\theta=0.\end{cases}\quad\cdots\cdots①$$

$0<6\theta<6\pi$ より，①を満たすのは

$$6\theta=2\pi,\ 4\pi\iff\theta=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi.\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(1) $a_n=\int_0^\pi \sin nx dx=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^\pi=-\frac{1}{n}(-1)^n-\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}$. ……(答)

$$b_n=\int_0^\pi x\sin nx dx=\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^\pi-\int_0^\pi 1\cdot\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx$$

$$=-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^n+\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi+\frac{1}{n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi$$

$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi$. ……(答)

(2) $0\leqq(-1)^{n+1}+1\leqq 2$ であるから

$$0\leqq\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\leqq\frac{2}{n}$$

$$0\leqq a_n\leqq\frac{2}{n}.$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ であり，挟み打ちの原理より

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. ……(答)

(3)
$$b_k b_{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}}{k}\pi\cdot\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}\pi=\frac{(-1)^{2k+3}}{k(k+1)}\pi^2=\frac{-1}{k(k+1)}\pi^2$$

$$=\pi^2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}b_k b_{k+1}=\pi^2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\pi^2\left(\frac{1}{n+1}-1\right).$$

よって

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k b_{k+1}=\lim_{n\to\infty}\pi^2\left(\frac{1}{n+1}-1\right)=-\pi^2$. ……(答)

(1)　$a>1,\ b>1$ であるから，$\log a>0,\ \log b>0$ となる．

(相加平均)≧(相乗平均) を利用して

$$\log\sqrt{ab}=\frac{\log a+\log b}{2}\geqq\sqrt{(\log a)(\log b)}.$$

したがって

$$\log\sqrt{ab}\geqq\sqrt{(\log a)(\log b)}.$$ 終

(等号成立は $a=b$ のとき)

(2)　$x>1$ のとき

$$f'(x)=\frac{(\log(x+1))'\log x-\log(x+1)(\log x)'}{(\log x)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{\log x}{x+1}-\dfrac{\log(x+1)}{x}}{(\log x)^2}$$

$$=\frac{x\log x-(x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2}.$$ ……(答)

(3)　$x>1$ のとき，　$x+1>x>0.$ ……①

$x>1$ において，$\log x$ は単調増加関数より

$$\log(x+1)>\log x>0.$$ ……②

①, ②より

$$(x+1)\log(x+1)>x\log x.$$

$x>1$ のとき，$x(x+1)(\log x)^2>0$ で $x\log x-(x+1)\log(x+1)<0$ を満たすから

(2) より，$f'(x)<0$ となる．

すなわち，$x>1$ のとき $f(x)$ は単調減少関数となる．

よって，$x>1$ のとき

$$f(x)>f(x+1)\iff\frac{\log(x+1)}{\log x}>\frac{\log(x+2)}{\log(x+1)}.$$

$\log x>0,\ \log(x+1)>0$ より，両辺に $(\log x)\log(x+1)$ を掛けて

$$(\log(x+1))^2>(\log x)\log(x+2).$$ 終