２０１　その１

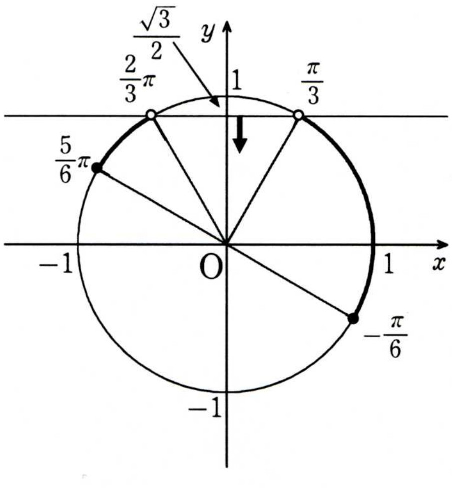
(1)
$$\left(\frac{1}{27}\right)^x < 3^{5x-2}$$
$$x\log_3\frac{1}{27} < 5x-2$$
$$-3x < 5x-2$$
$$x > \frac{1}{4}. \quad \cdots\cdots\cdots \ ①$$

また
$$\log_9\frac{3}{x} > 1$$
$$\frac{3}{x} > 9 \qquad (x>0)$$
$$\frac{1}{3} > x \qquad (x>0)$$
$$\therefore\ 0 < x < \frac{1}{3}. \quad \cdots\cdots\cdots \ ②$$

①，②より
$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}. \quad \cdots\cdots\cdots \ (答)$$

(2)
$$\sqrt{3}\sin x - \cos x < \sqrt{3}$$
$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots \ ③$$

$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$の範囲で③を解くと
$$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi < x-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$$
$$\therefore\ 0 \leqq x < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi < x \leqq \pi. \quad \cdots\cdots\cdots \ (答)$$



２０１　その２

(1)　各位が３通りずつの重複順列であるから

$$3^5=243\text{（個）}.\ \cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

(2)　２の倍数となるためには，一の位が２であればよい．十，百，千，万の位はそれぞれ３通りずつであるから

$$1\times3^4=81\text{（個）}.\ \cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

(3)　3の倍数となるためには，各位の数の和が3の倍数となればよい．その組合せは

〔ア〕 {1, 1, 1, 1, 2}　　〔イ〕 {1, 1, 1, 3, 3}　　〔ウ〕 {1, 1, 2, 2, 3}

〔エ〕 {1, 2, 2, 2, 2}　　〔オ〕 {1, 2, 3, 3, 3}　　〔カ〕 {2, 2, 2, 3, 3}

〔キ〕 {3, 3, 3, 3, 3}

である．

〔ア〕および〔エ〕について　　それぞれ　$\dfrac{5!}{4!}=5$ 個.

〔イ〕および〔カ〕について　　それぞれ　$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 個.

〔ウ〕について　　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$ 個.

〔オ〕について　$\dfrac{5!}{3!}=20$ 個,　　〔キ〕については　1個.

以上より，3の倍数であるものは

$$5\times2+10\times2+30+20+1=81\text{（個）}.\ \cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

(4)　４の倍数となるためには，下二桁が４の倍数となればよい．その組合せは

12, 32

である．百，千，万の位それぞれ３通りずつであるから，４の倍数であるものは

$$2\times3^3=54\text{（個）}.\ \cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

(5)　６の倍数となるためには，３の倍数でかつ２の倍数となればよい．

したがって，(3)の〔ア〕～〔キ〕において，一の位が２であるものを考える．

〔ア〕の場合　　11112 の　1個.

〔イ〕および〔キ〕の場合（2を含まないから）　　0個.

〔ウ〕の場合　十～万の位が 1, 1, 2, 3 の順列で　$\dfrac{4!}{2!}=12$ 個.

〔エ〕の場合　十～万の位が 1, 2, 2, 2 の順列で　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 個.

〔オ〕の場合　十～万の位が 1, 3, 3, 3 の順列で　$\dfrac{4!}{3!}=4$ 個.

〔カ〕の場合　十～万の位が 2, 2, 3, 3 の順列で　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 個.

よって，６の倍数であるものは

$$1+0+12+4+4+6=27\text{（個）}.\ \cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

２０１　その３

(1)　点 P が △ABC の周および内部にある条件は

$$\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ 0 \leqq \ell \leqq 1 \\ 0 \leqq k+\ell \leqq 1. \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$5\overrightarrow{AP}+11\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CB}$ より

$$5\overrightarrow{AP}+11\overrightarrow{AP}-11\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{AP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}$$

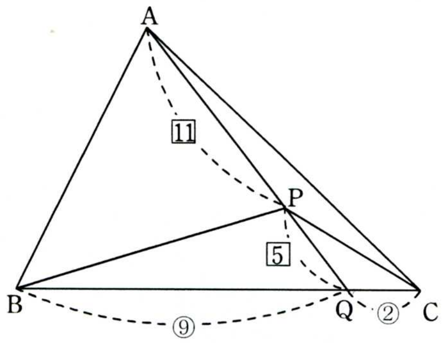
$$\therefore\ k=\frac{1}{8},\ \ell=\frac{9}{16} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) より　$$\overrightarrow{AP}=\frac{11}{16}\left(\frac{2}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{11}\overrightarrow{AC}\right).$$

線分 BC を 9 : 2 に内分する点を Q とすると

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{AC}}{11}$ であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{11}{16}\overrightarrow{AQ}$$



よって，

$$\text{BQ} : \text{QC} = 9 : 2,\quad \text{AP} : \text{PQ} = 11 : 5.$$

$$\implies \triangle\text{PAB}=\triangle\text{ABC}\times\frac{9}{11}\times\frac{11}{16}$$

$$=\triangle\text{ABC}\times\frac{9}{16}.$$

$$\triangle\text{PBC}=\triangle\text{ABC}\times\frac{5}{16}.$$

$$\triangle\text{PCA}=\triangle\text{ABC}\times\left(1-\frac{9}{16}-\frac{5}{16}\right)$$

$$=\triangle\text{ABC}\times\frac{2}{16}.$$

$$\therefore\ \triangle\text{PAB} : \triangle\text{PBC} : \triangle\text{PCA} = 9 : 5 : 2. \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

２０１　その４

(1)
$$f(x)=x(x-2)(x^2-2x-6)$$
と因数分解される。

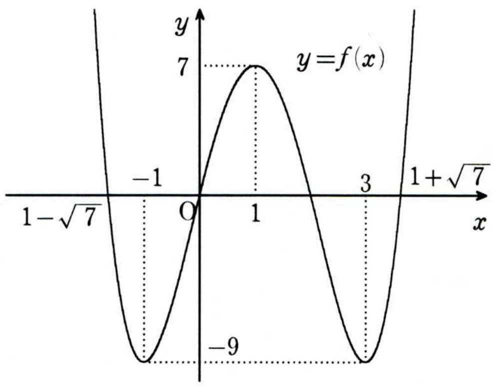
$x^2-2x-6=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{7}$ であるから，方程式 $f(x)=0$ の解は
$$x=0,\ 2,\ 1\pm\sqrt{7}.\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)
$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3+12x^2-4x+12\\&=4(x^3-3x^2-x+3)\\&=4(x+1)(x-1)(x-3)\end{aligned}$$
より，$f'(x)=0$ を満たす x の値は $x=-1,\ 1,\ 3$ であるから $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

従って，関数 $f(x)$ は $x=1$ で極大となり，極大値は
$$f(1)=1-4-2+12=7\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)



$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx&=\int_{-1}^{0}\{-f(x)\}\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx\\&=\int_{0}^{-1}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx\\&=\left[\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^{-1}+\left[\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^{1}\\&=(-1)+6+(-1)+6\\&=10.\ \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$