２０２　その１

(1)
$$f(x)=x(x-2)(x^2-2x-6)$$
と因数分解される。

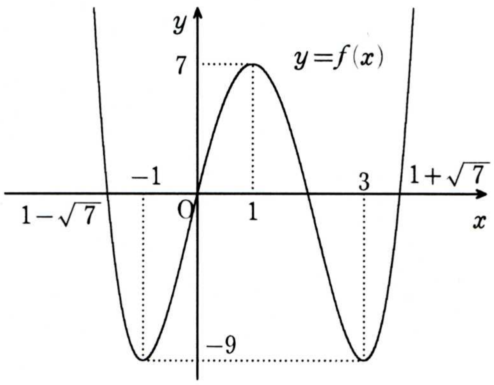
$x^2-2x-6=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{7}$ であるから，方程式 $f(x)=0$ の解は
$$x=0,\ 2,\ 1\pm\sqrt{7}.\ \cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3+12x^2-4x+12\\&=4(x^3-3x^2-x+3)\\&=4(x+1)(x-1)(x-3)\end{aligned}$$
より，$f'(x)=0$ を満たす x の値は $x=-1,\ 1,\ 3$ であるから $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

従って，関数 $f(x)$ は $x=1$ で極大となり，極大値は
$$f(1)=1-4-2+12=7\quad\cdots\cdots(答)$$

(3)



$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx&=\int_{-1}^{0}\{-f(x)\}\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx\\&=\int_{0}^{-1}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx\\&=\left[\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^{-1}+\left[\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^{1}\\&=(-1)+6+(-1)+6\\&=10.\ \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

２０２　その２

(1)　(i)　$x+2y \geqq 0$ かつ $2x-y \geqq 0$ $\left(\Longleftrightarrow \ -\dfrac{1}{2}x \leqq y \leqq 2x \right)$ のとき

$$(x+2y)+(2x-y) \leqq 1$$
$$y \leqq 1-3x.$$

(ii)　$x+2y<0$ かつ $2x-y \geqq 0$ $\left(\Longleftrightarrow \ y<-\dfrac{1}{2}x \text{ かつ } y \leqq 2x \right)$ のとき

$$-(x+2y)+(2x-y) \leqq 1$$
$$y \geqq \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}.$$

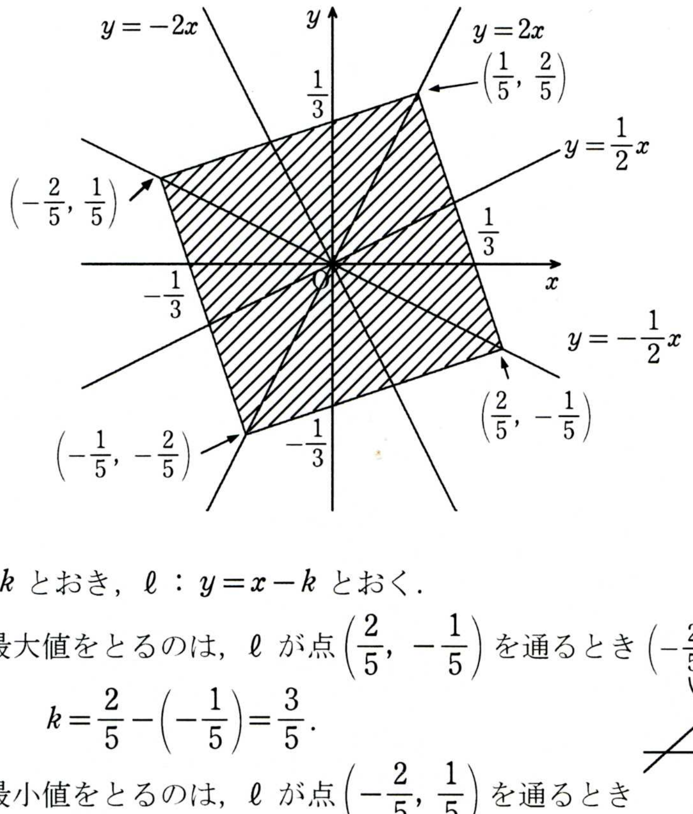
(iii)　$x+2y<0$ かつ $2x-y<0$ $\left(\Longleftrightarrow \ 2x<y<-\dfrac{1}{2}x \right)$ のとき

$$-(x+2y)-(2x-y) \leqq 1$$
$$y \geqq -3x-1.$$

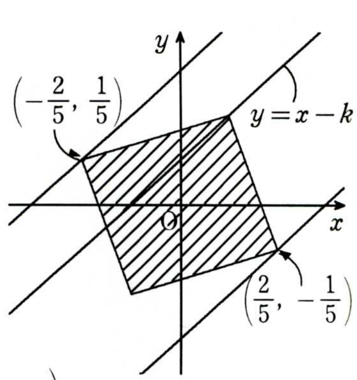
(iv)　$x+2y \geqq 0$ かつ $2x-y<0$ $\left(\Longleftrightarrow \ y \geqq -\dfrac{1}{2}x \text{ かつ } y>2x \right)$ のとき

$$(x+2y)-(2x-y) \leqq 1$$
$$y \leqq \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.$$

(i)～(iv)より，領域 D は下図の斜線の部分となる(境界線を含む)



(2)　$x-y=k$ とおき，ℓ : $y=x-k$ とおく.



k が最大値をとるのは，ℓ が点 $\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right)$ を通るとき

$$k=\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

k が最小値をとるのは，ℓ が点 $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ を通るとき

$$k=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}.$$

よって，$x-y$ の最大値は $\dfrac{3}{5}$ $\left(x=\dfrac{2}{5},\ y=-\dfrac{1}{5} \text{ のとき}\right)$

$x-y$ の最小値は $-\dfrac{3}{5}$ $\left(x=-\dfrac{2}{5},\ y=\dfrac{1}{5} \text{ のとき}\right)$.　……(答)

(3) $|x|-|y|=m$ とおくと

(ア) $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき　$m=x-y \iff \ell_1 : y=x-m$.

ℓ_1 が $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を通るとき，m の最大値は $\dfrac{1}{3}$.

ℓ_1 が $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，m の最小値は $-\dfrac{1}{3}$.

(イ) $x \leqq 0,\ y \geqq 0$ のとき　$m=-x-y \iff \ell_2 : y=-x-m$.

ℓ_2 が $\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を通るとき，m の最大値は $\dfrac{1}{3}$.

ℓ_2 が $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，m の最小値は $-\dfrac{1}{3}$.

(ウ) $x \leqq 0,\ y \leqq 0$ のとき　$m=-x+y \iff \ell_3 : y=x+m$.

ℓ_3 が $\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を通るとき，m の最大値は $\dfrac{1}{3}$.

ℓ_3 が $\left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，m の最小値は $-\dfrac{1}{3}$.

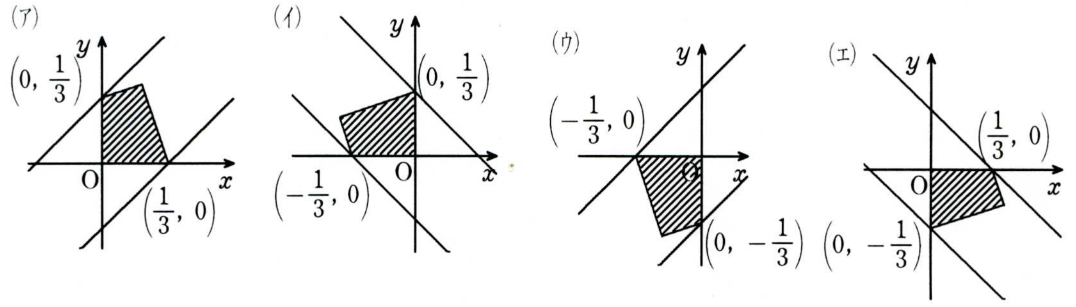
(エ) $x \geqq 0,\ y \leqq 0$ のとき　$m=x+y \iff \ell_4 : y=-x+m$.

ℓ_4 が $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を通るとき，m の最大値は $\dfrac{1}{3}$.

ℓ_4 が $\left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，m の最小値は $-\dfrac{1}{3}$.

(ア)～(エ)より

$$\left.\begin{array}{l} m \text{ の最大値は } \dfrac{1}{3},\quad (x,\ y)=\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right),\ \left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right) \text{ のとき} \\ m \text{ の最小値は } -\dfrac{1}{3}\quad (x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right),\ \left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right) \text{ のとき.} \end{array}\right\} \cdots\cdots(\text{答})$$



(1) $f(x)=ax^2+n-\dfrac{1}{2}$, $g(x)=\log x$ とおくと

$$f'(x)=2ax,\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

共有点が$(p,\ q)$ $(p>0)$ より

$$\begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases} \iff \begin{cases} ap^2+n-\dfrac{1}{2}=\log p & \cdots\cdots① \\ 2ap=\dfrac{1}{p} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② において $p>0$ より

$$ap^2=\frac{1}{2},\quad p=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

① に代入して

$$n=-\frac{1}{2}\log 2a$$

$$-2n=\log 2a$$

$$2a=e^{-2n}$$

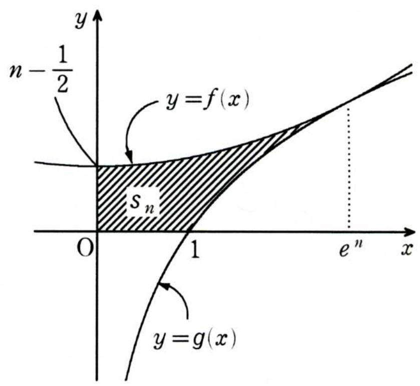
$$a=\frac{1}{2e^{2n}} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{e^{2n}}}}=e^n \quad \cdots\cdots(答)$$

$$q=\log p=\log e^n=n \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{e^n}\left(ax^2+n-\frac{1}{2}\right)dx-\int_1^{e^n}\log x\,dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3+\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{e^n}-\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^n} \\ &= \frac{a}{3}e^{3n}+\left(n-\frac{1}{2}\right)e^n-(ne^n-e^n)+(-1) \\ &= \frac{1}{6}e^n+\frac{1}{2}e^n-1 \\ &= \frac{2}{3}e^n-1 \quad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$



(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{3}e^{n+1}-1}{\dfrac{2}{3}e^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{3}e-\dfrac{1}{e^n}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{e^n}}=\frac{\dfrac{2}{3}e}{\dfrac{2}{3}}=e \quad \cdots\cdots(答)$$

２０２　その４

(1) $$A=XY=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & 2\sqrt{2}\\ 5\sqrt{2} & 2\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}.$$

$k>0,\ \ 0\leqq\theta<2\pi$ より

$$k=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \theta=\frac{\pi}{6}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$とおくと

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}-10^8\\ \sqrt{3}\times10^8\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6}\\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10^8\\ \sqrt{3}\times10^8\end{pmatrix}$$

$$=2^{-\frac{n}{2}+1}\cdot10^8\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6}\\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=2^{1-\frac{n}{2}}\cdot10^8\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6}\\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$$

$$=2^{1-\frac{n}{2}}\cdot10^8\begin{pmatrix}\cos\frac{n+4}{6}\pi\\ \sin\frac{n+4}{6}\pi\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{OP}_n=2^{1-\frac{n}{2}}\cdot10^8$ より，P_n が原点を中心とする半径１の円の内部にある条件は

$$2^{1-\frac{n}{2}}\cdot10^8<1\iff 2^{1-\frac{n}{2}}<10^{-8}$$

$$\iff\left(1-\frac{n}{2}\right)\log_{10}2<-8$$

$$\iff 1-\frac{n}{2}<-\frac{8}{\log_{10}2}$$

$$\iff n>2+\frac{16}{\log_{10}2}.$$

ここで　$53.1<\dfrac{16}{\log_{10}2}<53.2$ より

$$n>55.1$$

よって，条件を満たす最小の n は 56. ………（答）

(3)　(2)より　$\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{OP}_n=2^{1-\frac{n}{2}}\cdot 10^8$.

$$
\begin{aligned}
2^8<\sqrt{x^2+y^2}<2^{15} \quad &\Leftrightarrow \quad 2^8<2^{1-\frac{n}{2}}\cdot 10^8<2^{15}\\
&\Leftrightarrow \quad 8\log_{10}2<8+\left(1-\frac{n}{2}\right)\log_{10}2<15\log_{10}2\\
&\Leftrightarrow \quad 7\log_{10}2-8<-\frac{n}{2}\log_{10}2<14\log_{10}2-8\\
&\Leftrightarrow \quad 2(8-14\log_{10}2)<n\log_{10}2<2(8-7\log_{10}2)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{16}{\log_{10}2}-28<n<\frac{16}{\log_{10}2}-14.
\end{aligned}
$$

$53.1<\dfrac{16}{\log_{10}2}<53.2$より

$$53.1-28<n<53.2-14$$

$$25.1<n<39.2. \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$y>|x|$より

$$\left|\cos\frac{n+4}{6}\pi\right|<\sin\frac{n+4}{6}\pi$$

$$\frac{\pi}{4}+2m\pi<\frac{n+4}{6}\pi<\frac{3}{4}\pi+2m\pi \quad (m\text{は整数})$$

$$12m-\frac{5}{2}<n<12m+\frac{1}{2} \quad (m\text{は整数}). \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$m=1$のとき　$10-\dfrac{1}{2}<n<12+\dfrac{1}{2}$.　(①を満たさない)

$m=2$のとき　$22-\dfrac{1}{2}<n<24+\dfrac{1}{2}$.　(①を満たさない)

$m=3$のとき　$34-\dfrac{1}{2}<n<36+\dfrac{1}{2}$.

これを満たす n は　34, 35, 36.

$m\geqq 4$のとき　$46-\dfrac{1}{2}<n$　(①を満たさない)

これより①, ②を満たす n の値は

$n=34$, 35, 36. …………(答)