２０３　その１

(1)　各位が３通りずつの重複順列であるから

$$3^5 = 243 \text{（個）}. \cdots\cdots\cdots \text{（答）}$$

(2)　２の倍数となるためには，一の位が２であればよい．十，百，千，万の位はそれぞれ３通りずつであるから

$$1 \times 3^4 = 81 \text{（個）}. \cdots\cdots\cdots \text{（答）}$$

(3)　3の倍数となるためには，各位の数の和が3の倍数となればよい．その組合せは

〔ア〕 {1, 1, 1, 1, 2}　〔イ〕 {1, 1, 1, 3, 3}　〔ウ〕 {1, 1, 2, 2, 3}

〔エ〕 {1, 2, 2, 2, 2}　〔オ〕 {1, 2, 3, 3, 3}　〔カ〕 {2, 2, 2, 3, 3}

〔キ〕 {3, 3, 3, 3, 3}

である．

〔ア〕および〔エ〕について　それぞれ $\dfrac{5!}{4!} = 5$ 個.

〔イ〕および〔カ〕について　それぞれ $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ 個.

〔ウ〕について　$\dfrac{5!}{2!2!} = 30$ 個.

〔オ〕について　$\dfrac{5!}{3!} = 20$ 個,　〔キ〕については　1 個.

以上より，3の倍数であるものは

$$5 \times 2 + 10 \times 2 + 30 + 20 + 1 = 81 \text{（個）}. \cdots\cdots\cdots \text{（答）}$$

(4)　４の倍数となるためには，下二桁が４の倍数となればよい．その組合せは

12,　32

である．百，千，万の位それぞれ３通りずつであるから，４の倍数であるものは

$$2 \times 3^3 = 54 \text{（個）}. \cdots\cdots\cdots \text{（答）}$$

(5)　６の倍数となるためには，３の倍数でかつ２の倍数となればよい．

したがって，(3)の〔ア〕〜〔キ〕において，一の位が２であるものを考える．

〔ア〕の場合　11112 の　1 個.

〔イ〕および〔キ〕の場合（2を含まないから）　0 個.

〔ウ〕の場合　十〜万の位が 1, 1, 2, 3 の順列で　$\dfrac{4!}{2!} = 12$ 個.

〔エ〕の場合　十〜万の位が 1, 2, 2, 2 の順列で　$\dfrac{4!}{3!} = 4$ 個.

〔オ〕の場合　十〜万の位が 1, 3, 3, 3 の順列で　$\dfrac{4!}{3!} = 4$ 個.

〔カ〕の場合　十〜万の位が 2, 2, 3, 3 の順列で　$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 個.

よって，６の倍数であるものは

$$1 + 0 + 12 + 4 + 4 + 6 = 27 \text{（個）}. \cdots\cdots\cdots \text{（答）}$$

２０３　その２

(1)　点 P が △ABC の周および内部にある条件は

$$\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ 0 \leqq \ell \leqq 1 \\ 0 \leqq k+\ell \leqq 1. \end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$5\overrightarrow{AP}+11\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CB}$ より

$$5\overrightarrow{AP}+11\overrightarrow{AP}-11\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{AP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}$$

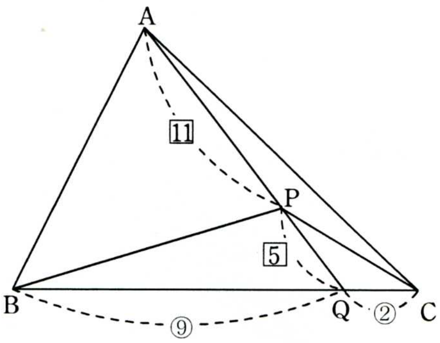
$$\therefore\ k=\frac{1}{8},\ \ell=\frac{9}{16} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)　(2) より　$$\overrightarrow{AP}=\frac{11}{16}\left(\frac{2}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{11}\overrightarrow{AC}\right).$$

線分 BC を 9 : 2 に内分する点を Q とすると

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{AC}}{11}$ であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{11}{16}\overrightarrow{AQ}$$



よって，

$$BQ : QC = 9 : 2, \quad AP : PQ = 11 : 5.$$

$$\implies \triangle PAB=\triangle ABC\times\frac{9}{11}\times\frac{11}{16}$$

$$=\triangle ABC\times\frac{9}{16}.$$

$$\triangle PBC=\triangle ABC\times\frac{5}{16}.$$

$$\triangle PCA=\triangle ABC\times\left(1-\frac{9}{16}-\frac{5}{16}\right)$$

$$=\triangle ABC\times\frac{2}{16}.$$

$$\therefore\ \triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 9 : 5 : 2. \quad \cdots\cdots(答)$$

２０３　その３

(1)　C : $y^2-4y-8x+20=0$　を変形して

$$(y-2)^2=8(x-2). \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

これは　$y^2=8x$ のグラフをx軸方向に2，y軸方向に2だけ平行移動したものであるから

$$a=2,\ b=2. \quad \cdots\cdots\cdots (答)$$

(2)　点$(0,\ t)$を通り，傾き$\dfrac{1}{m}$の直線は

$$y=\frac{1}{m}x+t.$$

これを①に代入して

$$\left(\frac{1}{m}x+t-2\right)^2=8(x-2)$$

$$\frac{1}{m^2}x^2+\left(\frac{2t-4}{m}-8\right)x+t^2-4t+20=0$$

$$x^2+2\{m(t-2)-4m^2\}x+m^2(t^2-4t+20)=0.$$

これがxについて重解をもつから

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{m(t-2)-4m^2\}^2-m^2(t^2-4t+20)\\&=16m^4-8m^3(t-2)-16m^2\\&=8m^2\{2m^2-(t-2)m-2\}=0.\end{aligned}$$

$m\neq 0$より

$$2m^2+(2-t)m-2=0. \quad \cdots\cdots\cdots ②\ (答)$$

(3)　②の２つの解を$\alpha,\ \beta$とおくと，解と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{-2}{2}=-1.$$

$m=\alpha, m=\beta$ のとき，ℓ の傾きはそれぞれ$\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta}$であるから

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-1.$$

よって　$(0,\ t)$から引いた2接線はtの値によらず垂直である．終

２０３　その４

(1)　$f(x)=ax^2+n-\dfrac{1}{2}$，$g(x)=\log x$　とおくと

$$f'(x)=2ax,\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

共有点が $(p,\ q)$ $(p>0)$ より

$$\begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases} \iff \begin{cases} ap^2+n-\dfrac{1}{2}=\log p & \cdots\cdots① \\ 2ap=\dfrac{1}{p} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② において $p>0$ より

$$ap^2=\frac{1}{2},\quad p=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

① に代入して

$$n=-\frac{1}{2}\log 2a$$

$$-2n=\log 2a$$

$$2a=e^{-2n}$$

$$a=\frac{1}{2e^{2n}}\quad\cdots\cdots(答)$$

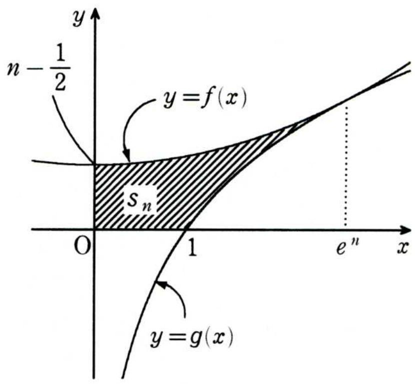
$$p=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{e^{2n}}}}=e^n$$

$$q=\log p=\log e^n=n$$

$$(p,\ q)=(e^n,\ n).\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)

$$\begin{aligned} S_n&=\int_0^{e^n}\left(ax^2+n-\frac{1}{2}\right)dx-\int_1^{e^n}\log x\,dx \\ &=\left[\frac{a}{3}x^3+\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{e^n}-\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^n} \\ &=\frac{a}{3}e^{3n}+\left(n-\frac{1}{2}\right)e^n-(ne^n-e^n)+(-1) \\ &=\frac{1}{6}e^n+\frac{1}{2}e^n-1 \\ &=\frac{2}{3}e^n-1\quad\cdots\cdots(答) \end{aligned}$$



(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{3}e^{n+1}-1}{\dfrac{2}{3}e^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{3}e-\dfrac{1}{e^n}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{e^n}}=\frac{\dfrac{2}{3}e}{\dfrac{2}{3}}=e.\quad\cdots\cdots(答)$$