1 (1)

$$AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b & -2a+b\\ c+2d & -2c+d\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2c & a-2d\\ 2a+c & 2b+d\end{pmatrix}.$$

$AB=BA$ より，求める条件は

$$\begin{cases}a+2b=a-2c\\ -2a+b=a-2d\\ c+2d=2a+c\\ -2c+d=2b+d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=d\\ b=-c.\end{cases} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) $a=-\dfrac{1}{2}$ より，$d=a=-\dfrac{1}{2}$.

$a=d=-\dfrac{1}{2}$, $b=-c$ より，$ad-bc=1$ だから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+b^2=1$$

$$b^2=\frac{3}{4}.$$

$b>0$ より

$$b=\frac{\sqrt{3}}{2},\ c=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

したがって

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3) ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)A+\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}E=O$$

$$A^2+A+E=O. \quad \cdots\cdots①$$

よって

$$\begin{aligned}E+A+A^2+A^3+\cdots\cdots+A^{100}&=E+A+A^2(E+A+A^2)+A^5(E+A+A^2)\\ &\quad+\cdots\cdots+A^{98}(E+A+A^2)\\ &=E+A\ (\because ①)\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}. \quad \cdots\cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

2 (1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$ より

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=1+\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{3}{2}=\frac{3^n-1}{2}. \quad \cdots\cdots ①$$

①は $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=\frac{3^n-1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots). \quad \cdots\cdots (答)$$

(2) $b_{n+1}=3b_n+3^{2n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+3^n.$$

$c_n=\dfrac{b_n}{3^n}$ とおくと

$$c_1=1,\ c_{n+1}=c_n+3^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots).$$

(1) より，数列 $\{c_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ と同じ数列となるから

$$c_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

$c_n=\dfrac{b_n}{3^n}$ より

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{3^n-1}{2}$$

$$b_n=\frac{(3^n)^2-3^n}{2}=\frac{9^n-3^n}{2}. \quad \cdots\cdots (答)$$

(3) よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}b_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{9\cdot 9^{k-1}-3\cdot 3^{k-1}}{2}\\&=\frac{9}{2}\cdot\frac{9^n-1}{9-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3^n-1}{3-1}\\&=\frac{9^{n+1}-9}{16}-\frac{3^{n+1}-3}{4}\\&=\frac{9^{n+1}-4\cdot 3^{n+1}+3}{16}. \quad \cdots\cdots (答)\end{aligned}$$

3 (1)

$$\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int (x)'\sin x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$$

$$=x\sin x-(-\cos x)+C \text{ (}C\text{は積分定数)}$$

$$=x\sin x+\cos x+C \text{ (}C\text{は積分定数)}. \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) $\int_0^1 tg(t)dt=a$, $\int_0^{\pi} tf(t)dt=b$ とおくと

$$f'(x)=-\sin x-3a,\ g'(x)=8x-3b.$$

よって

$$f(x)=\int(-\sin x-3a)dx=\cos x-3ax+C_1 \text{ (}C_1\text{は積分定数)},$$

$$g(x)=\int(8x-3b)dx=4x^2-3bx+C_2 \text{ (}C_2\text{は積分定数)}.$$

ここで，$f(0)=1$, $g(0)=0$ より

$$f(0)=1+C_1=1 \iff C_1=0,$$

$$g(0)=C_2=0 \iff C_2=0.$$

また

$$a=\int_0^1 t(4t^2-3bt)dt=\Big[t^4-bt^3\Big]_0^1=1-b$$

$$b=\int_0^{\pi} t(\cos t-3at)=\Big[t\sin t+\cos t-at^3\Big]_0^{\pi}=-2-a\pi^3.$$

$b=1-a$ を代入して

$$1-a=-2-a\pi^3$$

$$(\pi^3-1)a=-3$$

$$a=-\frac{3}{\pi^3-1},$$

$$b=\frac{\pi^3+2}{\pi^3-1}.$$

よって

$$f(x)=\cos x+\frac{9}{\pi^3-1}x,\ g(x)=4x^2-\frac{3(\pi^3+2)}{\pi^3-1}x. \cdots\cdots \text{(答)}$$