２０１　その１

(1)　$x+y=5$，$x^3+y^3=50$ のとき，$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ より

$$50=5^3-3\cdot xy\cdot 5 \iff xy=5 \quad \cdots(答)$$

このとき，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=5^2-2\cdot 5=15 \quad \cdots(答)$

すると，

$$\begin{aligned} x^5+y^5&=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)\\ &=15\cdot 50-5^2\cdot 5\\ &=625 \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

(2)　$x>1$ のとき，

$$\log_2\frac{x}{4^3}=\log_2 x-\log_2 4^3=\log_2 x-\log_2 2^6=\log_2 x-6$$

$$\log_x 4^4=\frac{\log_2 4^4}{\log_2 x}=\frac{\log_2 2^8}{\log_2 x}=\frac{8}{\log_2 x}$$

であり，$x>1$ のときは $\log_2 x>0$ であるから

$$\begin{aligned} \log_2\frac{x}{4^3}+\log_x 4^4<0 &\iff (\log_2 x-6)+\frac{8}{\log_2 x}<0\\ &\iff (\log_2 x)^2-6\log_2 x+8<0\\ &\iff (\log_2 x-2)(\log_2 x-4)<0\\ &\iff 2<\log_2 x<4\\ &\iff \log_2 4<\log_2 x<\log_2 16\\ &\iff 4<x<16 \ (\because \ 底2>1)\end{aligned}$$

$$\therefore\ 4<x<16 \quad \cdots(答)$$