

202 その3

(1) $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ において

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}, \quad A^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4y_1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より} \quad A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = -2A^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_1 \\ -8y_1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より} \quad A^3 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4y_1 \end{pmatrix} = 4A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_2 \\ -8y_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{4}$$

よって、 A^3 により P , Q はそれぞれ点 $(-8x_1, -8y_1)$, $(-8x_2, -8y_2)$ に移される。終

(2) 3点 O , P , Q が一直線上にあると仮定すると $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ (k は実数) $\cdots \textcircled{5}$ とおける。

$$\textcircled{3} \text{より} \quad A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{5} \text{より} \quad A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = -2k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2k^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore kA^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\begin{aligned} kA^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= kA \left\{ kA \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\} = k^2 A \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = -2k^2 A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2k^2 A \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = -2k^3 A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= -2k^3 \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = 4k^3 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4k^3 \left\{ k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\} = 4k^4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\textcircled{6}, \textcircled{7} \text{より} \quad 4k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 4k^4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ここで、 $x_1=0$ かつ $y_1=0$ であるとする、 $P(0, 0)$, $Q(0, 0)$ となって P , Q が一致し適さない。また、 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ とすると、 $4k = 4k^4$ となるから

$$k(k^3 - 1) = 0$$

$$k = 0, 1 \quad (\because k \text{は実数})$$

$k=0$ のとき、 $Q(0, 0)$ となる。

$$\textcircled{2} \text{より} \quad 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{となり} \quad P(0, 0) \text{となるから不適。}$$

$$k=1 \text{のとき,} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{となり} \quad P, Q \text{は一致するから不適。}$$

よって、3点 O , P , Q が一直線上にあるとすると $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ (k は実数) となる k が存在しないから矛盾する。従って、3点 O , P , Q は一直線上にない。

ゆえに、 $\overrightarrow{OP} \not\parallel \overrightarrow{OQ}$ となり $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ 終

$$(3) \quad A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_1 \\ -8y_1 \end{pmatrix}, \quad A^3 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_2 \\ -8y_2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

(2)より $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ であるから $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$ は存在し、両辺に右側から $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$

を掛けて

$$A^3 = -8E \quad \cdots (\text{答})$$