

202 その1・203 その2

(1) C_1 において $y' = 2a^3x$

C_2 において $y' = \frac{1}{x^2} (>0) \quad (\because x > 0)$

ℓ と C_2 との接点を $\left(t, -\frac{1}{t}\right)$ とおくと、接線の傾きが正より $t > 0$.

よって、 ℓ の方程式は

$$y + \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}(x - t)$$

$$y = \frac{1}{t^2}x - \frac{2}{t}. \quad \dots\dots ①$$

①と C_2 が接するから

$$a^3x^2 = \frac{1}{t^2}x - \frac{2}{t}$$

$$a^3x^2 - \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} = 0. \quad \dots\dots ②$$

②の判別式を D とおくと

$$D = \frac{1}{t^4} - 4 \cdot a^3 \cdot \frac{2}{t} = \frac{1 - 8a^3t^3}{t^4} = 0.$$

$a > 0$ より

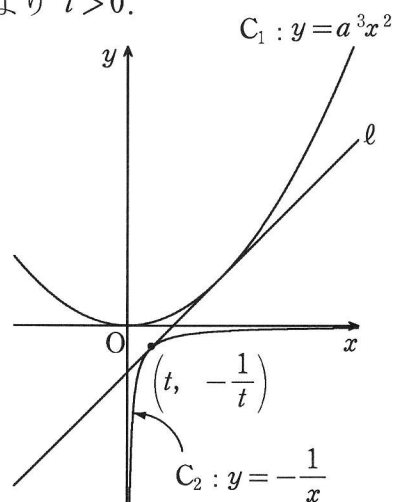
$$t^3 = \frac{1}{8a^3}.$$

$t > 0$ より

$$t = \frac{1}{2a}.$$

よって

$$\ell : y = 4a^2x - 4a. \quad \dots\dots (\text{答})$$



(2) (1)より $Q\left(\frac{1}{2a}, -2a\right).$

②より ℓ と C_1 の接点の座標は $x = \frac{1}{2a^3t^2} = \frac{2}{a}, y = 4a.$

$$\therefore P\left(\frac{2}{a}, 4a\right), Q\left(\frac{1}{2a}, -2a\right).$$

このとき

$$PQ^2 = \left(\frac{1}{2a} - \frac{2}{a}\right)^2 + (-2a - 4a)^2 = \frac{9}{4a^2} + 36a^2.$$

$\frac{9}{4a^2} > 0, 36a^2 > 0$ であるから(相加平均) $\geq$ (相乗平均)より

$$PQ^2 = \frac{9}{4a^2} + 36a^2 \geq 2\sqrt{\frac{9}{4a^2} \cdot 36a^2} = 18$$

等号成立は $a = \frac{1}{2}$ より

$$PQ \text{ の距離の最小値は } 3\sqrt{2} \quad \left(a = \frac{1}{2} \text{ のとき}\right). \quad \dots\dots (\text{答})$$