

203 その4

(1) 原点を中心とする 60° の回転移動は次の行列で表される。

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

PがQに移るから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x=2, \quad y=1+\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)より

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{3} \\ 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1+\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1+\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{3} \\ 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1+\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \quad \dots\dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 - E = O \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = E.$$

よって $A^{2k} = (A^2)^k = E$, $A^{2k-1} = (A^2)^{k-1} \cdot A = A$ (k は自然数)より

$$\begin{aligned} A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4 + \dots + (2n-1)A^{2n-1} + 2nA^{2n} \\ &= \{1+3+5+\dots+(2n-1)\}A + (2+4+6+\dots+2n)E \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1)A + \sum_{k=1}^n 2kE = \frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}A + n(n+1)E \\ &= n^2A + (n^2+n)E \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}n^2 + n^2 + n & \frac{n^2}{2} \\ \frac{n^2}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}n^2 + n^2 + n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2 + n & \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{2}n^2 & \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2 + n \end{pmatrix}. \quad \dots\dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$