２５４　その１

$\boxed{1}$ (1) $$AB=\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & c\\ d & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+bd & ac+2b\\ -2-d & 2c-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって
$$\begin{cases}-a+bd=0\\ ac+2b=0\\ -2-d=0\\ 2c-2=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+2b=0\\ c=1\\ d=-2.\end{cases}$$

$c=1,\ d=2$ を代入すると
$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+2 & -b-1\\ -2a+4 & -2b-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

よって
$$\begin{cases}-a+2=0\\ -b-1=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=2\\ b=-1.\end{cases}$$

したがって
$$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ -1,\ 1,\ -2).\ \cdots\cdots(答)$$

(2) $$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.\ \cdots\cdots(答)$$

$$B^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}.\ \cdots\cdots(答)$$

(3) $kAC^{-1}+lBC^{-1}=E$ の両辺に C を右側から掛けると
$$kA+lB=C$$
$$k\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 6 & -4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2k-l & -k+l\\ 2k-2l & -k+2l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 6 & -4\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}2k-l=5\\ -k+l=-3\\ -k+2l=-4\end{cases}$$
$$\begin{cases}k=2\\ l=-1.\end{cases}\ \cdots\cdots(答)$$

(4) (3) より　$2AC^{-1}-BC^{-1}=E$ より，両辺に C を右側から掛けて
$$2A-B=C.$$

$A,\ B$ は交換可能であるから
$$C^n=(2A-B)^n=2^nA^n+(-1)_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}A^{n-1}B+(-1)^2{}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2}A^{n-2}B^2+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1}(2A)B^{n-1}+(-1)^nB^n.$$

$A^2=A,\ B^2=B$ より，$A^k=A,\ B^k=B\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ であるから
$$C^n=2^nA+\{(-1)\cdot 2^{n-1}+(-1)^2{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot 2\}AB+(-1)^nB.$$

$AB=O$ より
$$C^n=2^nA+(-1)^nB=2^n\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+(-1)^n\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^{n+1}+(-1)^{n+1} & -2^n+(-1)^n\\ 2^{n+1}+2(-1)^{n+1} & -2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}.\ \cdots\cdots(答)$$