

254 その2

2 (1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ が成り立つとすると

$$(5a_n + 4b_n) + \alpha(a_n + 5b_n) = \alpha a_n + \alpha \beta b_n$$

$$(\alpha + 5)a_n + (5\alpha + 4)b_n = \beta a_n + \alpha \beta b_n.$$

これが任意の n について成り立つから

$$\begin{cases} \alpha + 5 = \beta \\ 5\alpha + 4 = \alpha\beta. \end{cases}$$

$\beta = \alpha + 5$ を代入して

$$5\alpha + 4 = \alpha(\alpha + 5)$$

$$(\alpha + 2)(\alpha - 2) = 0$$

$$\alpha = 2, -2.$$

ここで

$$\alpha = 2 \text{ のとき, } \beta = 7;$$

$$\alpha = -2 \text{ のとき, } \beta = 3.$$

よって

$$(a, b) = (2, 7), (-2, 3). \dots\dots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n), \dots\dots\textcircled{1}$$

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = 3(a_n - 2b_n). \dots\dots\textcircled{2}$$

①より, 数列 $\{a_n + 2b_n\}$ は初項 $a_1 + 2b_1 = 1$, 公比 7 の等比数列より

$$a_n + 2b_n = 7^{n-1}. \dots\dots\textcircled{3}$$

②より, 数列 $\{a_n - 2b_n\}$ は初項 $a_1 - 2b_1 = 1$, 公比 3 の等比数列より

$$a_n - 2b_n = 3^{n-1}. \dots\dots\textcircled{4}$$

③+④より

$$2a_n = 7^{n-1} + 3^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(7^{n-1} + 3^{n-1}). \dots\dots(\text{答})$$

③-④より

$$4b_n = 7^{n-1} - 3^{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{4}(7^{n-1} - 3^{n-1}). \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (7^{k-1} + 3^{k-1}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1(7^n - 1)}{7 - 1} + \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} \right\} = \frac{7^n - 1}{12} + \frac{3^n - 1}{4} \\ &= \frac{7^n + 3^{n+1} - 4}{12}. \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$