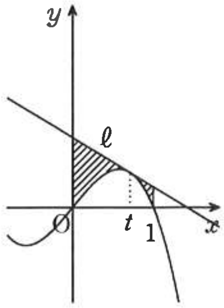
$\boxed{3}$ (1) $f(x)=x-x^3$ より，$f'(x)=1-3x^2$.

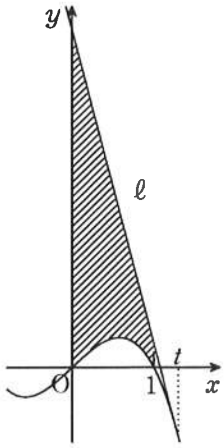
ℓ は点$(t,\ t-t^3)$ を通り $1-3t^2$ の直線より

$$y-(t-t^3)=(1-3t^2)(x-t)$$

$$y=(1-3t^2)x-t+3t^3+t-t^3$$

$$\therefore\quad \ell\ :\ y=(1-3t^2)x+2t^3.\ \cdots\cdots(\text{答})$$





(2) ℓ は $0\leqq x\leqq 1$ において，$y=f(x)$ の上の点かまたはその上部にあるから

$$S(t)=\int_0^1[\{(1-3t^2)x+2t^3\}-(x-x^3)]dx$$

$$=\int_0^1(x^3-3t^2x+2t^3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_0^1$$

$$=2t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{4}.\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $t\geqq 0$ のとき

$$S'(t)=6t^2-3t=3t(2t-1).$$

$t\geqq 0$ のとき，$S'(t)=0$ となるのは　$t=0,\ \dfrac{1}{2}$ のとき.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$	0	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{1}{8}$	↗

増減表より，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$S(t)$ の最小値は $\dfrac{1}{8}$.　$\cdots\cdots$(答)