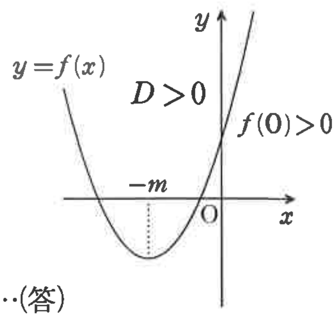
２０１　その１

(1)　$f(x)=x^2+2mx+m^2+2m-8$ とおく．

$f(x)=0$ が異なる２つの負の解をもつ条件は

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}=m^2-(m^2+2m-8)>0\\ -m<0\\ f(0)=m^2+2m-8>0\end{cases} \iff \begin{cases}m<4\\ m>0\\ m<-4,\ 2<m\end{cases}$$

$$\iff \quad 2<m<4. \quad \cdots\cdots(答)$$



(2)

$$a_n=1\cdot r^{n-1}=r^{n-1}.$$

これを $a_{n+1}=\dfrac{(a_n)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{b_n}}$ に代入して

$$r^n=\frac{(r^{n-1})^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{b_n}}=\frac{r^{\frac{4}{3}n-\frac{4}{3}}}{\sqrt{b_n}}$$

$$\sqrt{b_n}=r^{\frac{n}{3}-\frac{4}{3}}$$

$$b_n=r^{\frac{2}{3}n-\frac{8}{3}}=r^{-2}\cdot r^{\frac{2}{3}(n-1)}$$

$$\therefore\ b_n=\frac{r^{\frac{2}{3}(n-1)}}{r^2}. \quad \cdots\cdots(答)$$

$0<r^{\frac{2}{3}}<1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{1-r^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{r^2\left(1-r^{\frac{2}{3}}\right)}. \quad \cdots\cdots(答)$$

２０１　その２

(1)　$x \neq 0$ のとき　　$y' = 1 + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2+2}{x^2} > 0$

$y'' = -\dfrac{4}{x^3}$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
y'		$+$		$+$	
y''		$+$		$-$	
y	$(-\infty)$	↗		↗	(∞)

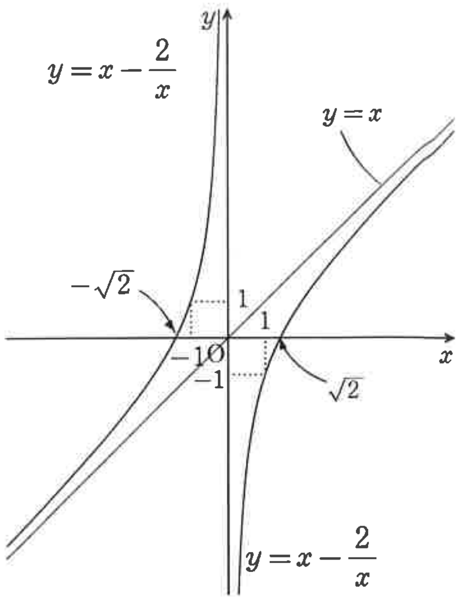
$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(x - \dfrac{2}{x}\right) = \infty$,

$\lim_{x\to-\infty}\left(x - \dfrac{2}{x}\right) = -\infty$,

$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0$,

$\lim_{x\to+0} y = -\infty$,　$\lim_{x\to-0} y = \infty$,

よって，$y=x$，y 軸が漸近線となる。

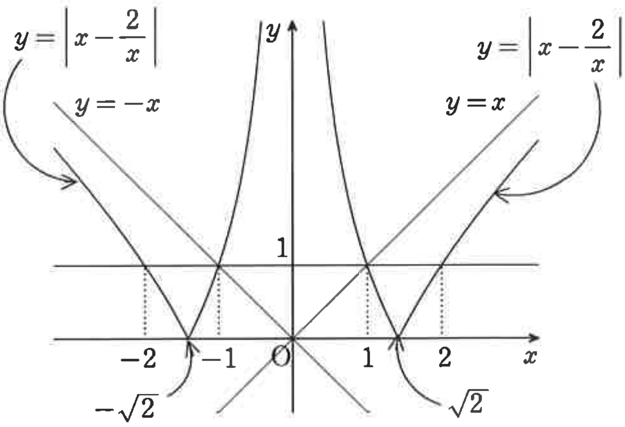


(2)　$y = \left|x - \dfrac{2}{x}\right|$ とおくと右図のように

$y \geqq 0$ で，y 軸に関して対称である。

右より，$\left|x - \dfrac{2}{x}\right| < 1$ の解は

$-2 < x < -1$，$1 < x < 2$　…(答)



２０１　その３

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{b}$より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=s+\frac{2}{3}t-\alpha=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{2}{3}s+t-\beta=0$$

したがって，

$$\alpha=s+\frac{2}{3}t,\quad \beta=\frac{2}{3}s+t \quad \cdots(\text{答})$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-s\vec{a}-t\vec{b}=\frac{1-3s}{3}\vec{a}+\frac{1-3t}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\frac{1}{3}\vec{c}$より

$$\frac{1-3s}{3}\vec{a}+\frac{1-3t}{3}\vec{b}=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は１次独立であるから，上式を満たすのは

$$\begin{cases}\dfrac{1-3s}{3}=0\\[2mm] \dfrac{1-3t}{3}=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}s=\dfrac{1}{3}\\[2mm] t=\dfrac{1}{3}\end{cases} \quad \cdots①$$

したがって，

$$\alpha=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9} \quad \cdots(\text{答})$$

$$\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9} \quad \cdots(\text{答})$$

(3)　(2)の結果と①から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot1+\frac{1}{9}\cdot1+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}$$

$$=\frac{17}{27}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{3}} \quad \cdots(\text{答})$$

２０１　その４

(1)
$$\sin^4 x\cos^2 x+\cos^4 x\sin^2 x=(\sin x\cos x)^2(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$ 終

(2) $x=\frac{\pi}{2}-t$ より　　$dx=-dt$,

x	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\ \to\ 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 x\,dx.$$ 終

(3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{0}{8}\right)-0$$
$$=\frac{\pi}{16}.$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{32}$$ ……(答)