２０２　その１

(1)　自然数nについて

$$\mathrm{P}_n\text{が}x+y=1\text{上にある}\quad\cdots①$$

を数学的帰納法で証明する。

［１］ $n=1$のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$は直線$x+y=1$上にある。

［２］ $n=k$のとき

$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$が$x+y=1$上にあると仮定すると，$x_k+y_k=1$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ 1-x_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_k+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_k+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって，$x_{k+1}+y_{k+1}=\left(\frac{1}{4}x_k+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}x_k+\frac{1}{2}\right)=1$より，

点$\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1})$は直線$x+y=1$上にある($n=k+1$のときも①を満たす).

［１］,［２］より，すべての自然数nについて①を満たす.

(2)　(1)より

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{2}$$

$$x_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(x_n-\frac{2}{3}\right)$$

数列$\left\{x_n-\frac{2}{3}\right\}$は初項$x_1-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$，公比$\frac{1}{4}$の等比数列より

$$x_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$x_n=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{2}{3}.\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　点$(x_n,\ y_n)$は$x+y=1$上にあるから$y_n=1-x_n$.

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

よって，P_nは点$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$に近づく.

$$\therefore\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\quad\cdots(\text{答})$$

２０２　その２

(1)　　$C_1 : y=|x|x$，$C_2 : y=ax^2+x-a$．

第３象限の C_1，C_2 の共有点の座標を $x<0$，$y<0$ で求める．

$$-x^2=ax^2+x-a$$
$$(a+1)x^2+x-a=0$$
$$\{(a+1)x-a\}(x+1)=0.$$

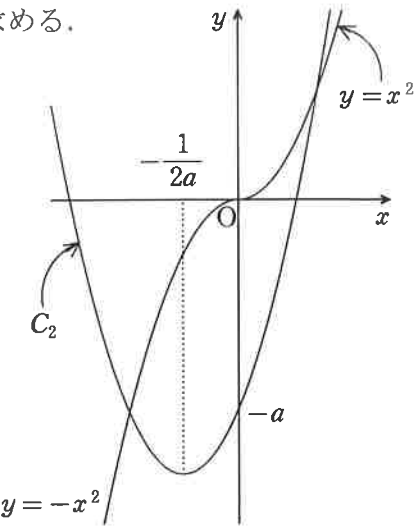
$a+1>0$ より　　$x=\dfrac{a}{a+1}$，-1．

$\dfrac{a}{a+1}>0$ より　　$x=-1$，

$$y=|-1|\cdot(-1)=-1.$$

よって，共有点は

$(-1,\ -1)$　……(答)



(2)　(1)と同様にして，共有点をもう１個もつとすると第１象限である．

C_1，C_2の第１象限における共有点のx座標を求めると

$$ax^2+x-a=x^2$$
$$(a-1)x^2+x-a=0$$
$$\{(a-1)x+a\}(x-1)=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc} a-1 & a & \longrightarrow & a \\ 1 & -1 & \longrightarrow & 1-a \\ \hline a-1 & -a & & 1 \end{array}\right)$$

$a-1\neq 0$なので

$$x=\frac{a}{1-a},\ 1$$

ここで，$\dfrac{a}{1-a}=1$のとき　$a=\dfrac{1}{2}$．

$0<a<\dfrac{1}{2}$のとき　$\dfrac{a}{1-a}\neq 1$よりC_1，C_2はすべての実数 x の範囲で３点で交わる．

$a=\dfrac{1}{2}$のとき　$x=1$で，$y=1^2=1$よりC_1，C_2は$(-1,\ -1)$，$(1,\ 1)$で交わる．

$\dfrac{1}{2}<a<1$のとき　$\dfrac{a}{1-a}\neq 1$より C_1, C_2 はすべての実数 x の範囲で３点で交わる．

よって，　$a=\dfrac{1}{2}$．……(答)

(3)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，C_1，C_2 の共有点の x 座標が $x=-1$，1 より

$$S=\int_{-1}^{0}\left\{-x^2-\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{x^2-\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{0}^{1}$$

$$=0-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{2}{3}$$ ……(答)

２０２　その３

(1)　最大値はa_3なので　$a_3=5$

$a_2=4$，$a_4=3$のとき　　a_1，4，5，3，a_5　　$(a_1, a_5)=(1, 2)$，$(2, 1)$

$a_2=4$，$a_4=2$のとき　　a_1，4，5，2，a_5　　$(a_1, a_5)=(3, 1)$

$a_2=3$，$a_4=4$のとき　　a_1，3，5，4，a_5　　$(a_1, a_5)=(1, 2)$，$(2, 1)$

$a_2=2$，$a_4=4$のとき　　a_1，2，5，4，a_5　　$(a_1, a_5)=(1, 3)$

よって，すべてのカードの並べ方は

6通り　…(答)

(2)　最大数はa_kなので　　$a_k=n$.

残りの$(n-1)$枚について，$k-1$枚選び（$a_k=n, a_p=1$に限る），残った$n-k$個から$n-k$個を選ぶ選び方は

$${}_{n-1}C_{k-1}\ \text{通り}.$$

このとき，$a_1<a_2\cdots\cdots<a_{k-1}$かつ$a_{k+1}>a_{k+2}>\cdots\cdots>a_n$となるように並べると${}_{n-1}C_{k-1}$通りの選び方について，それぞれ1通りあるから$k$を1から$n-2$まで変化させると総数は

$${}_{n-1}C_1+{}_{n-2}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}$$

となる。

このとき，

$$2^{n-1}=(1+1)^{k-1}=1+({}_{n-1}C_1+{}_{n-2}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-2})+1$$

より

$${}_{n-1}C_1+{}_{n-2}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}=2^{n-1}-2$$

よって，総数は

$$2^{n-1}-2\quad\cdots(\text{答})$$

(3)　1, n以外の$(n-2)$枚のカードから$(p-2)$枚のカードを選び出し，大きい順にa_1，a_2，a_3，……，a_{p-1}とする。次に，残りの$(n-p)$枚のカードのうち最大のものをa_qとし，その他の$(n-p-1)$枚のカードから$(q-p-1)$枚のカードを選び出し，大きい順にa_{q-1}，a_{q-2}，a_{q-3}，……，a_{p+1}と定める．選ばれなかったカードをa_{q+1}，a_{q+2}，……，a_nとすることで条件を満たす並べ方ができる．

総数は

$$\sum_{p=2}^{n-2}\left({}_{n-2}C_{p-2}\sum_{q=p+1}^{n-1}{}_{n-p-1}C_{q-p-1}\right)\quad\cdots①$$

ここで，$q-p=s$とおくと

$$①=\sum_{p=2}^{n-2}\left({}_{n-2}C_{p-2}\sum_{s=1}^{n-p-1}{}_{n-p-1}C_{s-1}\right)$$

また，$2^{n-p-1}={}_{n-p-1}C_0+{}_{n-p-1}C_1+\cdots\cdots+{}_{n-p-1}C_{n-p-1}$を用いて

$$\sum_{s=1}^{n-p-1} {}_{n-p-1}\mathrm{C}_{s-1} = {}_{n-p-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-p-1}\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + {}_{n-p-1}\mathrm{C}_{n-p-2} = 2^{n-p-1} - 1$$

$$①=\sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-p}\mathrm{C}_{p-2}(2^{n-p-1}-1) = \sum_{p=2}^{n-2}\left({}_{n-2}\mathrm{C}_{p-2}\cdot 2^{n-p-1} - {}_{n-2}\mathrm{C}_{p-2}\right) \quad \cdots②$$

ここで，$(1+2)^{n-2} = 2^{n-2}\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_0 + 2^{n-3}\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2}$を用いて

$$\sum_{p=2^{n-2}}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_{p-2}\cdot 2^{n-p-1} = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_{p-2}\cdot 2^{n-p}$$

$$= \frac{1}{2}(2^{n-2}\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_0 + 2^{n-3}\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + 2^2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{n-4})$$

$$= \frac{1}{2}(3^{n-2} - 2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{n-3} - {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2})$$

$$= \frac{1}{2}(3^{n-2} - 2n + 3)$$

$2^{n-2} = {}_{n-2}\mathrm{C}_0 + {}_{n-2}\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2}$を用いて

$$\sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_{p-2} = {}_{n-2}\mathrm{C}_0 + {}_{n-2}\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-4} = 2^{n-2} - (n-2) - 1$$

$$②= \frac{1}{2}(3^{n-2} - 2n + 3) - (2^{n-2} - n + 1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3^{n-2} - 2^{n-2} + \frac{1}{2}$$

したがって，総数は

$$\frac{1}{2}\cdot 3^{n-2} - 2^{n-2} + \frac{1}{2} \quad \cdots(答)$$

２０２　その４

(1)　$a_n=5p+(n-1)\cdot 5p=5np$ より　　$a_1=5p$，$a_p=5p^2$

$$\sum_{n=1}^{p} a_n=\sum_{n=1}^{p} 5pn=\frac{1}{2}p(5p+5p^2)=\frac{5}{2}p^2(p+1)$$

$$\sum_{n=1}^{p} b_n=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{p} a_n-a_1-a_p\right)=\frac{1}{5}\left\{\frac{5}{2}p^2(p+1)-5p-5p^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(p^3+p^2)-p-p^2=\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}p^2-p$$

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n=\frac{p}{2}\{2b_1+(p-1)p\}$ なので

$$pb_1=-p$$

p は素数より $p\neq 0$ であるから

$$b_1=-1 \quad \cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より $b_n=-1+(n-1)p$ なので

$$p=2 \text{ のとき} \qquad b_n=2n-3.$$

よって，$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{10n}{2n-3}=m$（$m$ は自然数）とおくと

$$10n=m(2n-3)$$

$$2mn-3m-10n=0$$

$$(m-5)(2n-3)=15.$$

$m-5\geqq -4$ より

$$(m-5,\ 2n-3)=(-3,\ -5),\ (-1,\ -15),\ (1,\ 15),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (15,\ 1)$$

$$(m,\ n)=(2,\ -1),\ (4,\ -6),\ (6,\ 9),\ (8,\ 4),\ (10,\ 3),\ (20,\ 2).$$

よって，m が自然数となる n の値は

$$n=-6,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 9.$$

であるが，a_n は数列より n は自然数。

よって，　　$n=2,\ 3,\ 4,\ 9.$ ……(答)

(3)

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{5np}{-1+(n-1)p}=5+\frac{5p+5}{(n-1)p-1}.$$

$n=1$ のとき　　$\dfrac{a_n}{b_n}=-5p$ で不適.

$n=2$ のとき　　$\dfrac{a_n}{b_n}=5+\dfrac{5p+5}{p-1}=10+\dfrac{10}{p-1}.$

$p\geqq 3$ より $\dfrac{a_n}{b_n}$ が自然数となるのは $p=3,\ 11.$

$n=3$ のとき　　$\dfrac{a_n}{b_n}=5+\dfrac{5p+5}{2p-1}=7+\dfrac{p+7}{2p-1}.$

$\dfrac{a_n}{b_n}$ が自然数となるのは $p=3$ のみ.

$n=4$ のとき　$\dfrac{a_n}{b_n}=6+\dfrac{2p+6}{3p-1}$.

$\dfrac{a_n}{b_n}$ が 自然数となるのは $p=7$ のみ.

$n=5$ のとき　$\dfrac{a_n}{b_n}=6+\dfrac{p+1}{4p-1}$.

$p \geqq 3$ より $p+1<4p-1$ であるから $\dfrac{a_n}{b_n}$ は自然数とならない.

$n=6$ のとき　$\dfrac{a_n}{b_n}=6+\dfrac{6}{5p-1}$.

$6<5p-1$ より $\dfrac{a_n}{b_n}$ は自然数とならない.

$n=7$のとき　$\dfrac{a_n}{b_n}=5+\dfrac{5p+5}{6p-1}$.

$\dfrac{a_n}{b_n}$ は自然数とならない.

$n=8$のとき　$\dfrac{a_n}{b_n}=5+\dfrac{5p+5}{7p-1}$.

よって, $\dfrac{a_n}{b_n}$ が自然数となるのは $p=3$ のときのみ.

$n \geqq 9$のとき　$5<\dfrac{a_n}{b_n}=5+\dfrac{5p+5}{8p-1}<6$.

$5p+5<8p-1$ より $\dfrac{a_n}{b_n}$ が自然数となることはない.

よって, 求める (p, n) の値の組は

$(p, n)=(3, 2), (3, 3), (3, 8), (7, 4), (11, 2)$. ……(答)