２０３　その１

(1)　$x \fallingdotseq 0$ のとき　$y' = 1 + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2+2}{x^2} > 0$

$y'' = -\dfrac{4}{x^3}$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
y'		$+$		$+$	
y''		$+$		$-$	
y	$(-\infty)$	↗		↗	(∞)

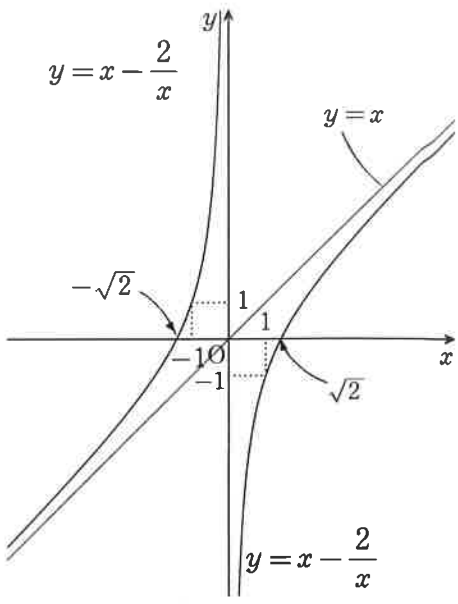
$\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - \dfrac{2}{x}\right) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \dfrac{2}{x}\right) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0$,

$\lim\limits_{x\to+0} y = -\infty$,　$\lim\limits_{x\to-0} y = \infty$,

よって，$y=x$，y 軸が漸近線となる。

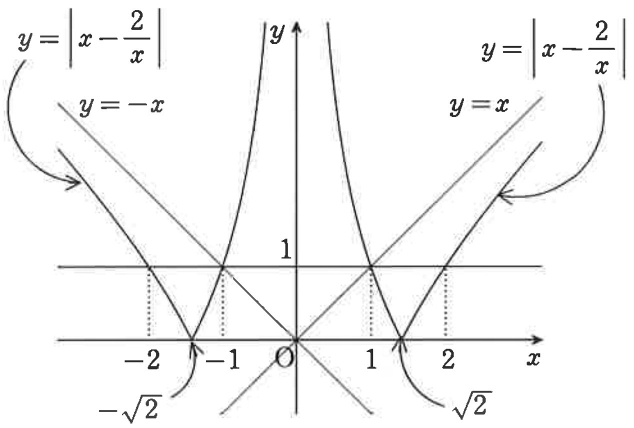


(2)　$y = \left|x - \dfrac{2}{x}\right|$ とおくと右図のように

$y \geqq 0$で，y 軸に関して対称である。

右より，$\left|x - \dfrac{2}{x}\right| < 1$の解は

$-2 < x < -1$，$1 < x < 2$　…(答)



２０３　その２

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{b}$より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=s+\frac{2}{3}t-\alpha=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{2}{3}s+t-\beta=0$$

したがって，

$$\alpha=s+\frac{2}{3}t,\ \beta=\frac{2}{3}s+t \quad \cdots(答)$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-s\vec{a}-t\vec{b}=\frac{1-3s}{3}\vec{a}+\frac{1-3t}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$より

$$\frac{1-3s}{3}\vec{a}+\frac{1-3t}{3}\vec{b}=\vec{0}.$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は１次独立であるから，上式を満たすのは

$$\begin{cases}\dfrac{1-3s}{3}=0\\[2mm] \dfrac{1-3t}{3}=0\end{cases} \iff \begin{cases}s=\dfrac{1}{3}\\[2mm] t=\dfrac{1}{3}\end{cases} \quad \cdots①$$

したがって，

$$\alpha=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}, \quad \cdots\cdots(答)$$

$$\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}. \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) (2)の結果と①から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$.

$$\begin{aligned}\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\frac{1}{9}\cdot1+\frac{1}{9}\cdot1+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}\\&=\frac{17}{27}.\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{3}}. \quad \cdots\cdots(答)$$

２０３　その３

(1)
$$\sin^4 x\cos^2 x+\cos^4 x\sin^2 x=(\sin x\cos x)^2(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$ 終

(2) $x=\frac{\pi}{2}-t$　より　$dx=-dt$,

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 x\,dx.$$ 終

(3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{0}{8}\right)-0$$
$$=\frac{\pi}{16}$$
$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{32}.$$ ……(答)

２０３　その４

(1)　$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$　$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{5}{6}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\frac{5}{6}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

したがって，
$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\frac{5}{6}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$P_n=\frac{5}{6}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}P_{n-1}$$

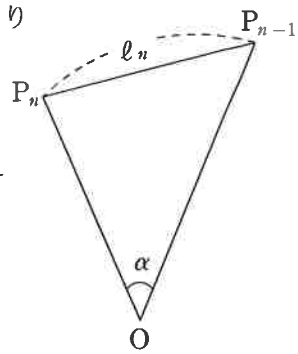
また，
$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$P_0(1,\ 0)$，$P_1\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}\right)$より

$$\ell_1{}^2=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{4}{9}=\frac{25}{36}$$

$\ell_1>0$より　　$\ell_1=\dfrac{5}{6}$　…(答)

(2)　$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\dfrac{5}{6}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$より$|\overrightarrow{OP_n}|=\dfrac{5}{6}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|$となり

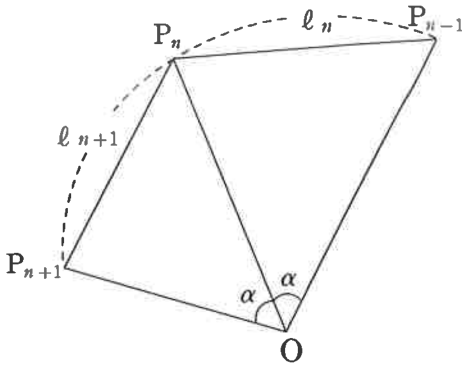


$$\begin{aligned}\ell_n{}^2&=|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2+|\overrightarrow{OP_n}|^2-2|\overrightarrow{OP_{n-1}}||\overrightarrow{OP_n}|\cos\alpha\\ &=|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2+\frac{25}{36}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2-2|\overrightarrow{OP_{n-1}}|\cdot\frac{5}{6}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|\cdot\frac{3}{5}\\ &=\frac{25}{36}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2\\ &=\frac{25}{36}(x_{n-1}{}^2+y_{n-1}{}^2)\end{aligned}$$

$\ell_n>0$より　　$\ell_n=\dfrac{5}{6}\sqrt{x_{n-1}{}^2+y_{n-1}{}^2}$　…(答)

(3)　$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\dfrac{5}{6}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$より，点 P_n は OP_{n-1} を原点を中心に反時計回り

に α だけ回転し，OP_n を OP_{n-1} の $\dfrac{5}{6}$ に縮小したものだから



$$OP_n=\frac{5}{6}OP_{n-1}.$$

同様にして　　$OP_{n+1}=\dfrac{5}{6}OP_n.$

$$\angle P_{n-1}OP_n=\angle P_nOP_{n+1}=\alpha.$$

よって，$\triangle P_{n-1}OP_n \backsim \triangle P_nOP_{n+1}$ となる．

$\triangle P_{n-1}OP_n$ と $\triangle P_nOP_{n+1}$は相似比が $1:\dfrac{5}{6}$ より

$$\ell_{n+1}=\frac{5}{6}\ell_n.$$

となる．したがって，

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}=\frac{5}{6}.\quad\cdots\cdots(答)$$

(4)　(3)より　　$\ell_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\ell_1=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\dfrac{5}{6}\right)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n.$

したがって，　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ell_n=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=5.$　$\cdots\cdots$(答)